Příklady na procvičení z předmětu Pravděpodobnost a matematická statistika

Poslední úprava 5. prosince 2017.

Většina příkladů je již upravena na základě toho, co jsme propočítali na cvičení a co bylo probráno na přednášce. Může ale ještě docházet ke změnám v části 6 (doplnění, odebrání příkladů).

1 Klasická pravděpodobnost

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   (a) součet čísel na kostkách bude sudé číslo a zároveň součin čísel bude liché číslo,
   (b) součet bude sudé číslo nebo součin bude liché číslo?

2. Ze zaměstnanců firmy, ve které je 7 mužů a 4 ženy, je náhodně vybraná 6-členná delegace. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň dvě ženy?

3. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka, házíme-li
   (a) dvěma kostkami,
   (b) n kostkami.

4. Do vlaku s 10 vagóny nastoupilo 16 cestujících, kteří si vagón zvolili náhodně. Určete pravděpodobnost, že do každého vagónu nastoupil alespoň jeden cestující.

5. Máme n různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme právě na k-tý pokus, jestliže vždy
   (a) vyzkoušený klíč dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících,
   (b) vyzkoušený klíč necháme na svazku, klíči zatřeseme a náhodně vybereme jeden ze svazku.

6. V regálu je 6 lahví normálního rumu a 4 lahví pančovaného rumu (vizuálně k nerozeznání). Náhodně vybereme z regálu 3 lahve a z každé ochutnáme. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) byl právě ve dvou námi ochutnaných lahvích metanol,
   (b) byl alespoň v jedné námi ochutnané lahvi metanol.

2 Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

7. Třikrát po sobě hodíme mincí a zaznamenáme výsledek. Označme rub jako R a líc jako L. Rozhodněte, zda jsou jevy $A = \{RRR, LRR, RLL, LLL\}$, $B = \{RRL, RLR, LLR, LLL\}$ a $C = \{RRL, RLR, LRL, LLL\}$ nezávislé.

8. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Své rozhodnutí vždy řádně zdůvodněte (uveďte důkaz nebo protipříklad).

(a) Jestliže jsou jevy A, B nezávislé, pak o nezávislosti jevů A^C, B^C obecně neumíme rozhodnout.
(b) Jestliže $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A) > 0$, pak $\mathsf{P}(B|A) \geq \mathsf{P}(B)$.
(c) Existují A, B neslučitelné jevy, tj. $A \cap B = \emptyset$, takové, že $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ a A, B jsou nezávislé.
(d) Jestliže platí $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B^C)$, pak jsou jevy A, B nezávislé.
(e) Jestliže $\mathsf{P}(B) > 0$, pak $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A)$.

9. Náhodné jevy A, B, C jsou nezávislé. Určete $\mathsf{P}(A \cup B \cup C)$, jestliže $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = 0.1$.

10. Na startu dostihu jsou (mimo jiné) koně Albín a Bertík. Albín zvítězí s pravděpodobností 0.5, Bertík s pravděpodobností 0.3. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Bertík, jestliže se Albín zranil na startu a závod nepoběží?

11. Tenistka má v prvním podání úspěšnost 60% a v druhém podání má úspěšnost 80%.

    (a) Jaká je pravděpodobnost dvojchyby?
    (b) S jakou pravděpodobností udělala tenistka v prvním podání chybu, když víme, že nedošlo k dvojchybě?

12. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4. Cestou ze školy navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

13. Tři skupiny studentů řeší obtížný příklad. Ve skupině A jsou 3 velmi chytří studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.8. Ve skupině B jsou 4 průměrní studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.6. Ve skupině C jsou 2 slabí studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností pouze 0.4.

    (a) S jakou pravděpodobností náhodný student vyřeší příklad?
    (b) Náhodně vybraný student příklad nevyřešil. Ze které skupiny nejpravděpodobněji byl?
    (c) Studenti pracují nezávisle. S jakou pravděpodobností bude příklad vyřešen?

14. Mezi 100 krabicemi mandarinek ze Španělska je 5 krabic se shnilými, stejně jako mezi 200 krabicemi z Řecka. Nejdříve vybereme náhodně jednu ze zásilek a potom ze zásilky náhodně vybereme krabici. Určete s jakou pravděpodobností obsahuje vybraná krabice shnilé mandarinky.

15. V krabici máme n bílých a m černých koulí. Postupně je taháme všechny ven (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že k-tá tažená koule je bílá?

16. V krabici je 15 tenisových míčků, z toho 9 úplně nových. Pro první hru si náhodně vybereme 3 míčky a po skončení hry je vrátíme zpátky. Pro druhou hru vybereme opět 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, jsou že všechny 3 míčky použité v druhé hře nové.

17. Slovo „humor“ se v americké angličtině píše jako HUMOR a v britské angličtině jako HUMOUR. Na zahradní slavnosti byly 2/3 Američanů a 1/3 Britů. Náhodně vybraný člověk napsal slovo humor (svým způsobem) a z tohoto slova bylo náhodně vybráno jedno písmeno. S jakou pravděpodobností byl daný člověk Brit, jestliže bylo vybráno písmeno "U"?

18. Z pošty doručené na server je 80 % spamů. Spamový filtr úspěšně rozpozná 90% všech spamů, ale zároveň 15 % korektní pošty je označeno jako spam.

(a) Jaké je pravděpodobnost, že email smazaný filtrem jste si chtěli přečíst?
(b) Jaké je procento spamů ve vaší schránce?

19. Máme tři truhly se dvěma mincemi. V truhle A jsou dvě zlaté mince, v truhle B dvě stříbrné mince a v truhle C zlatá a stříbrná mince. Náhodně vybereme truhlu a z ní vytáhneme náhodně minci. Ta je zlatá. Jaká je pravděpodobnost, že i druhá mince v této truhle je zlatá?

20. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance, který byl jednou střelou trefen. Určete pravděpodobnost toho, že kance zastřelil první, druhý nebo třetí střelec, jsou-li pravděpodobnosti zásahu po řadě rovny 0.2, 0.4 nebo 0.6.

21. V truhle je neznámý počet mincí: jedna zlatá mince a náhodný počet stříbrných mincí, přičemž stříbrných mincí je právě k s pravděpodobností $\frac{e^{-1}}{k!}$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Náhodně vylosujeme jednu minci a ta je zlatá. Jaké je pravděpodobnost, že v truhle bylo právě k stříbrných mincí za této dodatečné informace?

22. Na stole leží dvě urny A a B: V urně A jsou dvě bílé a dvě černé kuličky a v urně B jsou dvě černé a jedna bílá kulička. Náhodně vybereme z každé urny jednu kuličku a z těchto dvou kuliček pak náhodně zvolíme jednu. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali bílou kuličku?

23. U dvojčat je pravděpodobnost narození dvou chlapců rovna p a narození dvou děvčat rovna q, kde $0 < p+q < 1$. U dvojčat různého pohlaví je stejně pravděpodobné, že se jako první narodí dívka a že se jako první narodí chlapec. S jakou pravděpodobností se narodí dva chlapci, jestliže je prvorozené dítě z dvojčat chlapec?

24. V kuchyni je N talířů s buchtami. Na i-tém talíři je a_i buchet s tvarohovou náplní a b_i buchet s povidlovou náplní, což navenek bohužel nepoznáme. Proto náhodně vybereme jeden talíř a z něj jednu buchtu. Zjistíme, že je povidlová. S jakou pravděpodobností jsme zvolili k-tý talíř?

25. Ve sbírce 50 obrazů je 5 padělků. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 80%. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 5%. Určete
   (a) pravděpodobnost, že obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál,
   (b) pravděpodobnost, že obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek.

26. Házíme dvěma hracími kostkami najednou dokud nepadne součet 5 nebo součet 7 (na obou kostkách dohromady). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?

27. Každý lékařský test je charakterizován svojí senzitivitou a specificitou, kde
   - senzitivita = pravděpodobnost pozitivního výsledku, je-li testovaná osoba nemocná,
   - specificita = pravděpodobnost negativního výsledku, je-li testovaná osoba zdravá.

   Pro test zjišťující přítomnost HIV viru v těle se uvádí senzitivita 99.9% a specificita 99.7%. Uvažujme hypotetickou populaci, ve které se vyskytuje 1% lidí s virem HIV.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba s pozitivním výsledkem testu skutečně HIV pozitivní?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba ve skutečnosti HIV pozitivní, dává-li test negativní výsledek?
   (c) U pozitivně testovaných jedinců se test provádí ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že je člověk skutečně HIV pozitivní, byl-li i druhým testem označen za HIV pozitivního?

28. Na stole jsou dvě kostky — růžová a bledě zelená. Růžová kostka je pravidelná devítistěnná kostka, bledě zelená je pravidelná dvanáctistěnná kostka.

(a) Náhodně vybereme kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka? Jaká je pravděpodobnost, že padne jedenáctka?
(b) Padla jednička, jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli růžovou kostkou?
(c) Nyní předpokládejme, že děvčatům se více líbí růžová kostka, a tak si ji vyberou s pravděpodobností 4/5. Naopak, chlapci si vyberou bledě zelenou kostku s pravděpodobností 2/3.
   - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li chlapec?
   - Jaký je pravděpodobnost, že padne šestka, házela-li dívka?
   - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li náhodný student ze třídy, ve které je 10 chlapců a 5 dívek?

3 Náhodná veličina— diskrétní rozdělení

29. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, 3$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k^2 \quad k = 1, 2, 3$. Spočítejte konstantu c, střední hodnotu $\mathsf{E}X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\, X$, distribuční funkci F a pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \geq 2)$. Určete dále rozdělení veličiny $Y = (X - 2)^2$ a $\mathsf{E}Y$.

30. Náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 0, 1, 2$, a to s pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{12}$ a $\mathsf{P}(X = 2) = a$. Určete konstantu a, tak aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení. Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\, X$. Určete rozdělení veličiny $Y = X^2$ a spočítejte $\mathsf{E}Y$.

31. Basketbalista háže na koš, jeho pokusy jsou nezávislé a v každém z nich se trefí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Rozhodl se, že skončí teprve až vhodí k košů. Označme X počet neúspěšných hodů předcházejících k-tému úspěchu (k-tému vhozenému koši). Určete rozdělení náhodné veličiny X.

32. V krabici je N čokoládových bonbónů, z nichž je K plněno karamelovou náplní. Vyberete si z krabice náhodně n bonbónů. Nechť X značí počet vytažených bonbónů s karamelovou náplní.
   (a) Určete rozdělení X.
   (b) Spočítejte střední hodnotu X.
   (c) Spočítejte rozptyl X.

   (V bodech (b) a (c) využijte, že X můžeme napsat jako součet (závislých) 0-1 veličin.)

4 Náhodná veličina — spojité rozdělení

33. Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} ce^x & \text{pro } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

   Určete konstantu c, distribuční funkci $F(x)$, střední hodnotu $\mathsf{E}X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\, X$.

34. Hrana krychle má náhodnou délku X s rovnoměrným rozdělením na $[0, a]$, $a > 0$. Určete střední hodnotu a rozptyl objemu krychle.

35. Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f(x) = 3x^2$ pro $0 < x < 1$ a $f(x) = 0$ jinak. Určete
    (a) Rozdělení veličiny $Y = X^3$.
    (b) Střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = \frac{1}{X}$.

36. Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \pi]$. Definujme veličiny $Y = X^2$ a $Z = \sin X$. Určete
    (a) rozdělení (hustotu) veličiny Y a její střední hodnotu,
    (b) střední hodnotu veličiny Z,

37. Veličina X má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

    (a) Určete konstantu $c > 0$ a distribuční funkci F (načrtněte).
    (b) Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}X$.
    (c) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a určete medián.

38. Mějme dán pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou $c = 1$. Úhel mezi odvěsnou b a přeponou c je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, \pi/2)$.
    (a) S jakou pravděpodobností je daný trojúhelník rovnoramenný?
    (b) Jaké je rozdělení úhlu, který svírá odvěsna a s přeponou c? S jakou pravděpodobností leží tento úhel v intervalu $(\pi/6, \pi/3)$?
    (c) Určete rozdělení délky odvěsny a. Načrtněte graf hustoty a distribuční funkce tohoto rozdělení. S jakou pravděpodobností je odvěsna a delší než $1/2$?
    (d) Spočtěte střední délku odvěsny a a její rozptyl.
    (e) Určete očekávaný obsah trojúhelníku.

39. Poloměr bubliny vyfouknuté z bublifuku (v cm) je náhodná veličina R s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 3]$ Určete střední hodnotu a rozptyl objemu bubliny V.

5 Náhodné vektory

40. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
    (a) Určete sdružené rozdělení vektoru (X, Y).
    (b) Určete marginální rozdělení X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
    (c) Určete jejich kovarianci a korelační koeficient.

41. Zmatená šatnářka náhodně přiřadí n pánům jejich klobouky. Náhodná veličina X_i je indikátor jevu, zda má i-tý pán správný klobouk, $i = 1, \ldots, n$ (tj. $X_i = 1$, pokud i-tý pán má svůj klobouk a $X_i = 0$ jinak).
    (a) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl veličiny X_i pro pevně zvolené i.
    (b) Jsou veličiny X_i, X_j pro pevné i, j nezávislé?

(c) Spočítejte kovarianci X_i a X_j.
(d) Na základě výše uvedených výsledků spočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl počtu správně přiřazených klobouků. (Využijte, že počet správně přiřazených klobouků X lze vyjádřit jako $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.)

42. Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení s hustotou $f(x,y) = \begin{cases} cxye^{-(x^2+y^2)} & \text{pro } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$

(a) Určete konstantu c tak, aby f byla hustota.
(b) Spočtěte marginální hustoty f_X a f_Y veličin X a Y . Jsou veličiny X a Y nezávislé?
(c) Spočtěte $\mathsf{E}(X^2 + Y^2)$.

43. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
(b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
(c) Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathsf{E}U$, $\mathsf{Var}\, U$,$\mathsf{E}V$ a $\mathsf{Var}\, V$.

44. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $\mathsf{R}[0, 1]$. Nechť $D = \min\{X, Y\}$ a $H = \max\{X, Y\}$. Určete kovarianci $\mathsf{Cov}\,(D, H)$. Jsou D a H nezávislé?
Návod: Uvědomte si, že D je buď X nebo Y a podobně pro H, tedy součin DH má jednoznačný tvar.

6 Odhady parametrů

45. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, \theta]$, pro nějaké $\theta > 0$, tj. s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$

(a) Nalezněte odhad θ momentovou metodou.
(b) Zjistěte, zda je tento odhad nestranný a konzistentní.

46. Náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.

(a) Odhadněte parametr λ momentovou metodou.
(b) Rozhodněte, jaký má odhad z (a) vlastnosti.
(c) Navrhněte dva různé odhady pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X = 0)$.

47. V osudí jsou kuličky očíslované od 1 do N, kde N je neznámé. Postupně taháme s vracením a zaznamenáváme si tažená čísla, což odpovídá náhodným veličinám $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Určete rozdělení X_i a jejich střední hodnotu.
(b) Odhadněte neznámý parametr N momentovou metodou.
(c) Rozhodněte, zda je odhad z (b) nestranný a konzistentní.

48. Náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ pochází z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & x \in [0, \sqrt{2a}], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Ověřte, že se jedná o hustotu pravděpodobnosti.
(b) Odhadněte parametr a momentovou metodou.
(c) Je odhad z (b) konzistentní?

7 Centrální limitní věta

49. V Dolní Lhotě se koná výstava dojnic na kterou se sjede 10 000 lidí z širokého okolí. Každý návštěvník výstavy si potřebuje v jediném bankomatu, který je v Dolní Lhotě k dispozici, vybrat hotovost. V bankomatu se nacházejí pouze tisícikorunové bankovky. Konkrétní osoba vybere nezávisle na ostatních K tisícikorun. Předpokládejme, že K je náhodnou veličinou, jenž se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Kolik musí být před začátkem výstavy v bankomatu tisícikorun, aby s pravděpodobností alespoň 0,99 nedošlo k celkovému vybrání bankomatu během výstavy?

50. Hodíme stokrát šestistěnnou hrací kostkou. Určete přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, s jakou výsledný součet leží v rozmezí od 320 do 380 (včetně)?

51. Pořádáte svatební hostinu a objednali jste 200 zákusků. Ze zkušenosti víte, že počet zákusků, který sní náhodný host, se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 4. Kolik může nejvýše dorazit hostů na hostinu, aby se s pravděpodobností alespoň 0.9 nemusel žádný z hostů v jídle omezovat (tj. aby mohl sníst tolik zákusků, kolik jen chce)?

52. Počet studentů, kteří během konzultačních hodin v jednom týdnu navštíví profesora A, je roven k s pravděpodobností $1/5$ pro $k = 1, \dots, 5$. Zjistěte, s jakou pravděpodobností bude profesor A během akademického roku (40 týdnů) konzultovat s nejvýše 100 studenty. Při řešení příkladu předpokládejte, že počty konzultacechtivých studentů v jednotlivých týdnech jsou vzájemně nezávislé.

53. Pravděpodobnost zásahu terče je při každém ze 700 výstřelů 0.4. Jaká je pravděpodobnost toho, že odchylka relativní četnosti zásahů od uvedené pravděpodobnosti nepřesáhne 0.05?