Náhodný vektor

- zatím jsme sledovali jednu náhodnou veličinu, její rozdělení a charakteristiky
- často potřebujeme vyšetřovat vzájemný vztah několika náhodných veličin
- musíme sledovat jejich chování „společně“
- příklady: vztah hmotnosti a výšky člověka, šířka a délka výrobku, teplota, tlak a vlhkost vzduchu, pohlaví a plat náhodně vybraného člověka ...
- obecně můžeme sledovat n náhodných veličin, pro jednoduchost se ale omezíme na dvě veličiny X a Y

Náhodný vektor

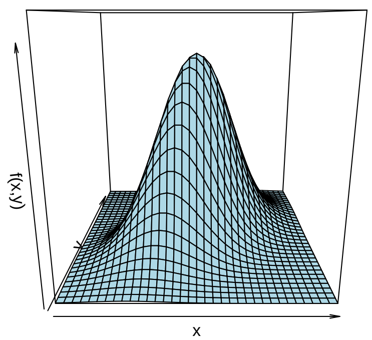
Náhodný vektor je dvojice náhodných veličin $(X, Y)^{\mathsf{T}} = \binom{X}{Y}$.

Rozdělení náhodného vektoru

- sdružená *distribuční funkce* $F(x, y) = \mathrm{P}[X \leq x, Y \leq y]$, která je funkcí z $\mathbb{R}^2 \to [0, 1]$
- spojité rozdělení popíšeme tzv. sdruženou *hustotou*
  - je teď funkcí $\mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$
  - hodnota $f(x, y)$ udává, jak často náhodný vektor padá kolem bodu (x, y)
  - má vlastnosti analogické hustotě náhodné veličiny
- diskrétní rozdělení popíšeme tzv. sdruženými pravděpodobnostmi $p_{ij} = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$ pro všechna možná x_i a y_j (tabulka pravděpodobností)

Hustota náhodného vektoru

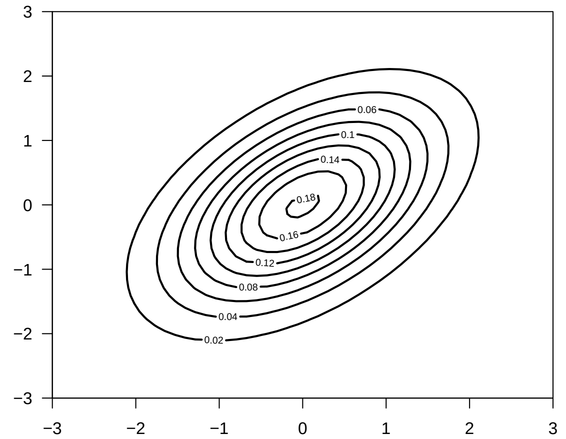
Příklad hustoty spojitého rozdělení:



Platí $f(x, y) \geq 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$.

Hustota náhodného vektoru

Hustota z předchozího obrázku nakreslená pomocí vrstevnic.



Příklad diskrétního rozdělení

Příklad: Na základě historických zkušeností lze předpokládat, že známky z matematiky a fyziky v prvním ročníku mají rozdělení uvedené v následující tabulce

	Fyzika			
Matematika	1	2	3	4
1	0.1	0.1	0.02	0.01
2	0.08	0.12	0.06	0.01
3	0.05	0.08	0.12	0.02
4	0.01	0.02	0.1	0.1

Platí $\sum_{i,j=1}^{4} p_{ij} = 1$

Sdružené a marginální rozdělení

- Rozdělení náhodného vektoru $\binom{X}{Y}$ obsahuje něco navíc, než kdybychom znali jen rozdělení samotné náhodné veličiny X a samotné náhodné veličiny Y.
- To, co je tam navíc, je informace o vzájemném vztahu obou veličin.

- Rozdělení náhodného vektoru $\binom{X}{Y}$ nazýváme *sdružené rozdělení* náhodných veličin X a Y.
- Rozdělení samotného X a samotného Y nazýváme *marginální rozdělení* náhodných veličin X a Y.

Sdružené a marginální rozdělení

Interpretace:

- sdružené rozdělení nám říká, jak se chová (X, Y) společně (jakožto dvojice)
- marginální rozdělení popisuje chování jedné veličiny bez ohledu na hodnoty druhé

Vztah sdruženého a marginálního rozdělení:

- ze sdruženého rozdělení lze vždy určit marginální
- opačně to obecně není možné, tj. z marginálního nelze jednoznačně určit rozdělení sdružené
  (k dané dvojici marginálních rozdělení dokonce existuje nekonečně mnoho odpovídajících sdružených rozdělení)

Příklad známky

	Fyzika (Y)				
Matematika (X)	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

Z tabulky umíme spočítat rozdělení samotného X a samotného Y (tj. marginální rozdělení). Např.

$$\mathrm{P}[X = 1] = \mathrm{P}[X = 1, Y = 1] + \cdots + \mathrm{P}[X = 1, Y = 4] = 0.23$$

Sdružené a marginální rozdělení

Věta

Nechť $\binom{X}{Y}$ je diskrétní náhodný vektor s rozdělením určeným pravděpodobnostmi $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$. Marginální rozdělení veličin X a Y pak jsou

$$P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} P\Big[X = x_i, Y = y_j\Big] = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$
$$P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} P\Big[X = x_i, Y = y_j\Big] = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Sdružené a marginální rozdělení

Pro spojité rozdělení platí analogie předchozího tvrzení:

Věta

Nechť $\boldsymbol{X} = \binom{X}{Y}$ je náhodný vektor se spojitým rozdělením se sdruženou hustotou $f(x, y)$. Marginální hustoty veličin X a Y pak jsou

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

Nezávislost náhodných veličin

- v praxi nás často zajímá, zda je mezi veličinami X a Y nějaký vztah
- spec. se můžeme ptát, zda jsou nezávislé $\leftrightsquigarrow$ hodnoty jedné veličiny nezávisí na hodnotách druhé

Příklad

Nechť X je známka z Matematické statistiky a Y je počet navštívených přednášek náhodně vybraného studenta. Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?

- nezávislost $\leftrightsquigarrow$ známka nezávisí na počtu navštívených přednášek $\leftrightsquigarrow$ $\mathrm{P}(X = i | Y = j)$ nezávisí na hodnotách j, tj. $\mathrm{P}(X = i | Y = j) = \mathrm{P}(X = i)$
- už víme, že toto odpovídá podmínce $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = \mathrm{P}(X = i)\mathrm{P}(Y = j)$ pro všechna i, j

Nezávislost náhodných veličin

Definice

Náhodné veličiny X a Y nazveme *nezávislé*, pokud pro každé dvě množiny $A, B \subset \mathbb{R}$ platí

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A] \cdot P[Y \in B].$$

Nezávislé veličiny:

- $P[X \in A \mid Y \in B] = P[X \in A]$ tj. hodnoty jedné náhodné veličiny nejsou ovlivněny hodnotami druhé.
- ze znalosti hodnoty jedné veličiny nic nevíme o druhé veličině

Charakterizace nezávislosti

Věta

1. Diskrétní náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když platí
$$P[X = x_i, Y = y_j] = P[X = x_i] \cdot P[Y = y_j]$$
pro každé x_i, y_j, kterých X a Y nabývají.
2. Spojité náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když platí
$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{pro každé } x, y \in \mathbb{R}.$$

Příklad známky

	Fyzika (Y)				
Matematika (X)	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

Součinová podmínka neplatí $\rightsquigarrow$ veličiny jsou závislé. Např.
$$\mathrm{P}[X = 1, Y = 1] = 0.1 \neq 0.23 \cdot 0.24.$$

Nezávislost — poznámka

- definici nezávislosti lze snadno rozšířit na více než dvě náhodné veličiny
- platí obdobné charakterizace nezávislosti (sdružená hustota je součinem marginálních hustot apod.)

Střední hodnota součtu a součinu

Věta

Nechť X, Y jsou libovolné náhodné veličiny.

1. Platí
$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$
2. Pokud jsou X a Y nezávislé, pak platí
$$\mathrm{E}XY = (\mathrm{E}X)(\mathrm{E}Y).$$

- střední hodnota součtu dvou (nebo více) náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot
- pro nezávislé náhodné veličiny je střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jejich středních hodnot
- pro závislé veličiny tomu tak může, ale nemusí být

Kovariance

- Jsou-li veličiny X a Y závislé $\rightsquigarrow$ budeme chtít popsat jejich závislost

Definice

Uvažujme náhodný vektor $\binom{X}{Y}$. *Kovariancí* náhodných veličin X a Y rozumíme hodnotu

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)]$$

- kovariance vyjadřuje vzájemný vztah X a Y
- evidentně platí $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$ a $\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var} X$.

Vlastnosti kovariance

Věta

1. Kovariance může nabývat jakýchkoli reálných hodnot, ale pro dvě konkrétní veličiny musí platit
$$\operatorname{cov}^2(X,Y) \leq \operatorname{var} X \cdot \operatorname{var} Y.$$
2. Platí
$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$
3. Pokud jsou X a Y nezávislé, pak $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

- pozor, tvrzení 3 neplatí opačně (tj. z nulové kovariance nelze obecně nic usuzovat o nezávislosti)
- 3 plyne z 2, neboť pro nezávislé veličiny $\mathrm{E}XY = \mathrm{E}X\mathrm{E}Y$.

Interpretace kovariance

- $\operatorname{cov}(X,Y) > 0 \leftrightsquigarrow$ náhodné veličiny X a Y jsou závislé v „pozitivním smyslu"
  - vyšší hodnoty X jsou svázány s vyššími hodnotami Y (a nižší hodnoty X s nižšími hodnotami Y)
  - příklad: výška a váha člověka.
- $\operatorname{cov}(X,Y) < 0 \leftrightsquigarrow$ náhodné veličiny X a Y jsou závislé v „negativním smyslu"
  - vyšší hodnoty X jsou svázány s nižšími hodnotami Y (a nižší hodnoty X s vyššími hodnotami Y)
  - příklad: výše IQ a průměrná známka na ZŠ
- $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ neznamená, že by mezi X a Y nebyl nutně žádný vztah (ještě se o tom zmíníme později)

Výpočet kovariance

K výpočtu se používá vzorec

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y$$

- člen $\mathrm{E}XY$ počítáme ze sdruženého rozdělení

$$\mathrm{E}XY = \begin{cases} \sum\sum_{i,j} x_i y_j \mathrm{P}[X = x_i, Y = y_j], & \text{pro diskrétní rozdělení,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy & \text{pro spojité rozdělení.} \end{cases}$$

- členy $\mathrm{E}X$ a $\mathrm{E}Y$ počítáme z marginálního rozdělení (střední hodnota náhodné veličiny)

Příklad známky

Matematika (X)	Fyzika (Y) 1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

$$\begin{aligned} \mathsf{E}XY &= 1 \cdot 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + \cdots + 4 \cdot 4 \cdot 0.1 = 6.43, \\ \mathsf{E}X &= 1 \cdot 0.23 + 2 \cdot 0.27 + \cdots + 4 \cdot 0.23 = 2.5, \\ \mathsf{E}Y &= 1 \cdot 0.24 + \cdots + 4 \cdot 0.14 = 2.34, \\ \operatorname{cov}(X,Y) &= 6.43 - 2.5 \cdot 2.34 = 0.58. \end{aligned}$$

Korelace

- hodnoty kovariance se špatně interpretují
- z hodnoty $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$ poznáme, že X a Y jsou závislé a jakým směrem, ale nepoznáme, jak silně jsou závislé

Definice

Uvažujme náhodný vektor $\binom{X}{Y}$. *Korelací* náhodných veličin X a Y rozumíme hodnotu

$$\operatorname{cor}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var} X \operatorname{var} Y}}.$$

- korelace se někdy značí ρ_{XY}
- někdy mluvíme o *korelačním koeficientu*.

Vlastnosti korelace

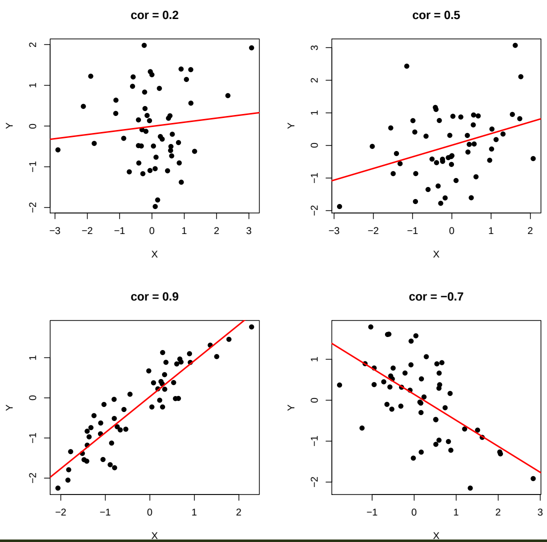
Věta

1. Korelace ρ_{XY} vždy leží mezi -1 a 1 a
$$\rho_{XY} = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{cov}(X,Y) = 0.$$
2. Pokud jsou X a Y nezávislé, pak $\operatorname{cor}(X,Y) = 0$.
3. Platí
$$\begin{aligned} \rho_{XY} = 1 \qquad & \text{právě když } Y = a + bX \\ & \qquad \text{pro nějaké } a \in \mathbb{R} \text{ a } b > 0. \\ \rho_{XY} = -1 \qquad & \text{právě když } Y = a + bX \\ & \qquad \text{pro nějaké } a \in \mathbb{R} \text{ a } b < 0. \end{aligned}$$

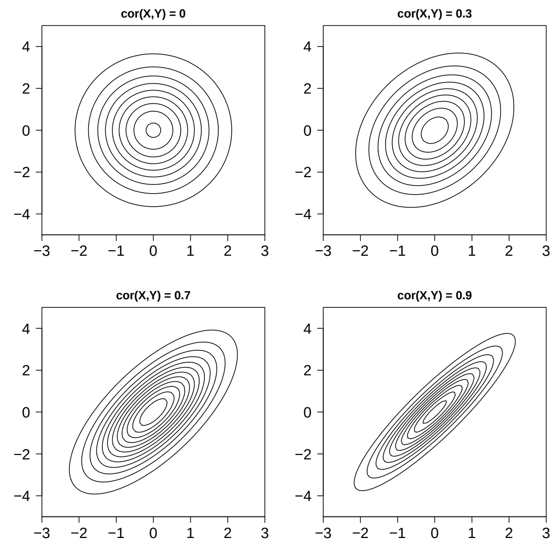
Interpretace korelace

- korelace měří sílu lineární závislosti mezi X a Y
- znaménko korelace udává směr závislosti
- jsou-li X a Y silně lineárně závislé (tj. hodnoty této dvojice padají nejčastěji někde kolem přímky v $\mathbb{R}^2$ s nenulovou směrnicí), pak je korelace blízko 1 nebo -1.
- nezávislé veličiny mají vždy nulovou korelaci
- je-li korelace nulová, neznamená to, že X a Y jsou nutně nezávislé
(korelace je mírou pouze lineární závislosti)

Interpretace korelace



Hustota rozdělení s různými korelacemi



Příklad známky

	Fyzika (Y)				
Matematika (X)	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.02	0.01	0.23
2	0.08	0.12	0.06	0.01	0.27
3	0.05	0.08	0.12	0.02	0.27
4	0.01	0.02	0.1	0.1	0.23
	0.24	0.32	0.3	0.14	1

Už víme $\operatorname{cov}(X,Y) = 0.58$. Z marginálních rozdělení spočítáme

$$\operatorname{var} X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = \dots = 7.42 - 2.5^2 = 1.17$$

$$\operatorname{var} Y = \mathsf{E}Y^2 - (\mathsf{E}Y)^2 = \dots = 6.46 - 2.34^2 = 0.98$$

$$\operatorname{cor}(X,Y) = \frac{0.58}{\sqrt{1.17 \cdot 0.98}} = 0.54.$$

Vlastnosti střední hodnoty a rozptylu

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

1. $\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X$,
2. $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$,
3. $\operatorname{var}(a + bX) = b^2 \operatorname{var} X$,
4. $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y + 2\operatorname{cov}(X, Y)$
5. pro nezávislé veličiny $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y$