Rozdělení náhodných veličin
19.3.2013

1. Připomeňte si, co je to náhodná veličina a jaká rozdělení znáte z přednášky.

2. V nabídce Distributions →Discrete distributions a Distributions →Continuous distributions se podívejte, jaké rozdělení Vám nabízí R-Commander.

3. **Binomické rozdělení.** V kurníku je 10 vajíček. Předpokládejme, že se z vajíčka vylíhne slepička se stejnou pravděpodobností jako kohoutek a že tato pravděpodobnost nijak nezávisí na tom, co se vylíhne z ostatních vajíček.

   (a) Jaké je rozdělení náhodné veličiny udávající počet slepiček? Nechte si graficky znázornit pravděpodobnosti jednotlivých hodnot a vypsat číselné hodnoty.
   Distributions →Discrete distributions →Binomial distribution →Plot binomial distribution,
   Distributions →Discrete distributions →Binomial distribution →Binomial probabilities

   (b) Jaký je nepravděpodobnější počet slepiček?
   Připomeňte si, jaká je střední hodnota počtu vylíhnutých slepiček.

   (c) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě pět slepiček? Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhnou právě dvě slepičky?

   (d) Ověřte, že R počítá správně, tj. spočtěte „ručně“ binomickou pravděpodobnost

   $$\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

   pro daná n, p, k.
   (V R lze využít funkci choose na výpočet kombinačního čísla.)

   (e) Příslušné pravděpodobnosti lze také získat pomocí funkce dbinom(k,n,p) pro zadané n, p, k. Ověřte, že dostanete stejný výsledek.

   (f) Nechte si vykreslit distribuční funkci počtu vylíhnutých slepiček a připomeňte si, jaké vlastnosti má distribuční funkce diskrétního rozdělení.
   Distributions →Discrete distributions →Binomial distribution →Plot binomial distribution, (Plot distribution function)

   (g) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhnou alespoň dvě slepičky?
   – Výsledek spočtěte ze znalosti pravděpodobnosti jednotlivých hodnot (viz výše).
   – K výpočtu použijte distribuční funkci.
   Distributions →Discrete distributions →Binomial distribution →Binomial tail probabilities

4. Předpokládejme, že je kohoutek „vzácnější“ a vylíhne se s pravděpodobností 1/5 (a slepička tudíž s pstí 4/5).

   (a) Podívejte se, jak se změnilo rozdělení počtu slepiček. Jaká je nyní nejpravděpodobnější hodnota? Jaký je očekávaný počet vylíhnutých slepiček?

   (b) Jaká je nyní pravděpodobnost, že se vylíhnou alespoň dvě slepičky?

   (c) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne alespoň pět slepiček?

5. Podívejte se, jak se mění pravděpodobnosti binomického rozdělení pro $n = 10$, když měníme p.

6. **Poissonovo rozdělení.** Předpokládejme, že se počet studentů na přednášce řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 15$.

   (a) Připomeňte si, jak vypadá Poissonovo rozdělení. Nechte si znázornit pravděpodobnosti jednotlivých hodnot pro tento příklad.
   Distributions →Discrete distributions →Poisson distribution →Plot Poisson distribution

   (b) Spočtěte pravděpodobnost, že na přednášce bude právě 10 studentů.
   – Výpočet proveďte „ručně“ pomocí vzorečku.
   – K výpočtu použijte funkci dpoiss(k,lam) pro vhodné k a (λ).
   – Použijte nabídku R-Commanderu (podobně jako u binomického rozdělení).

   (c) Určete pravděpodobnost, s jakou na přednášku nikdo nedorazí.

   (d) Jaká je pravděpodobnost, že dorazí maximálně pět studentů?

   (e) S jakou pravděpodobností nebude stačit posluchárna s kapacitou 25 míst (ve smyslu, že někdo nebude mít místo k sezení).

7. Z deseti miliónů pixelů obrazovky jsou v průměru dva vadné. Uvažujte obrazovku o rozměru 1280×1024 pixelů a předpokládejte, že počet vadných pixelů se řídí Poissonovým rozdělením.

   (a) Jaký je očekávaný počet vadných pixelů na obrazovce?

   (b) Nechte si vykreslit pravděpodobnosti jednotlivých hodnot. Která hodnota je nejpravděpodobnější?

   (c) Jaká je pravděpodobnost, že na obrazovce bude alespoň jeden vadný pixel?

   (d) Jaká je pravděpodobnost, že na obrazovce bude více než jeden vadný pixel?

8. **Souvislost mezi binomickým a Poissonovým rozdělením.** Porovnejte graficky pravděpodobnosti rozdělení Bi(n, p) a Po(np) pro různá n a p malá

   – Uvažujte např. $n = 20$, $p = 1/10$. Do skriptového okna napište
   par(mfrow=c(2,1)
   a pak postupně zavolejte oba obrázky. Porovnejte.
   – Proveďte totéž pro $n = 50$ a $p = 1/25$ a pro $n = 100$ a $p = 1/50$.

9. **Rovnoměrné rozdělení.** Metro odjíždí každých pět minut. Přijdete v náhodný okamžik, takže lze předpokládat, že se doba čekání na metro řídí rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 5)$.

   (a) Vykreslete si graf hustoty daného rozdělení.
   Distributions →Continuous distributions →Uniform distribution →Plot uniform distribution
   Jaké jsou obecné vlastnosti hustoty?

   (b) Nakreslete si graf distribuční funkce.
   Jaká je spojitost mezi distribuční funkcí a hustotou?

   (c) Uměli byste v obrázku hustoty (distr. funkce) vyznačit pravděpodobnost, že budete čekat méně než dvě minuty?
   Čemu je rovna tato pravděpodobnost?
   Distributions →Continuous distributions →Uniform distribution →Uniform probabilities

(d) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat déle než 5 minut?

(e) Jaká je pravděpodobnost, že čekáním strávíme dobu z intervalu 1 až 5 minut?

(f) Vypočítejte medián a 10 % a 90 % kvantil. Co tyto hodnoty vyjadřují?

10. Délka telefonního hovoru se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 5 minut.

    (a) Nechte si nakreslit hustotu tohoto rozdělení.

    (b) Jaká je pravděpodobnost, že hovor bude trvat více než 10 minut?

    (c) Spočítejte medián a srovnejte jej se vzorečkem z přednášky.

11. Zavřete celý program R a spusťte jej znovu. Tentokrát ale namísto obyčejného R-Commanderu spusťte R-Commander s doplňkem TeachingDemos.

    (a) Pomocí Distributions sip Visualize →Binomial distributions se dívejte, jak se mění binomické rozdělení při změně n a p.

    (b) Stejným způsobem si prohlédněte hustotu normálního rozdělení.

    (c) Pomocí Demos →Roll a die si hoďte kostkou. Až Vám padne šestka, můžete odejít domů.