Náhodné vektory I.

22.3.2018 a 26.3.2018

1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
   (a) Odvoďte rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^T$.
   (b) Jaké jsou marginální rozdělení X a Y? Jsou veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočítejte kovarianci a korelaci X a Y.
2. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu
$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$.
   (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci $\mathsf{Cov}\,(X, Y)$.
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než dvojnásobek toho co za jídlo?
   Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce $F(x, y)$?
3. Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Jaké je rozdělení dob životnosti jednotlivých součástek? Jsou tyto doby nezávislé? Jaká je jejich kovariance?
   (b) S jakou pravděpodobností první součástka přežije druhou?
4. Samička hmyzu naklade N vajíček, kde N je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $\mathsf{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živý jedinec je $p \in (0,\,1)$.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že se vylíhne právě k živých jedinců? Jaký je očekávaný počet živých jedinců?
   (b) Jaké je rozdělení N, jestliže víme, že se vylíhlo právě k živých jedinců?
   Jsou veličiny udávající počet nakladených vajíček a počet narozených jedinců nezávislé?
5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f. Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
   (a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
   (b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
   (c) Spočtěte $\mathsf{E}U$ a $\mathsf{E}V$ pro případ, kdy F odpovídá rovnoměrnému rozdělení na $[0, 1]$.
6. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?
7. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x, y) :\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1],\ y \geq x\}$. Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a spočtěte jejich kovarianci.

Marginální rozdělení:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou $f(x, y)$, pak marginální hustotu veličiny X spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d}y.$$

Podobně pro marginální hustotu f_Y veličiny Y.

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak marginální rozdělení veličiny X spočteme jako

$$\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Nezávislost:

(a) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ spojité rozdělení s hustotou f, X má marginální hustotu f_X a Y má hustotu f_Y, pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Jestliže má $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot (x_i, y_j), pak jsou veličiny X, Y nezávislé právě tehdy, když

$$\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\mathsf{P}(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

Kovariance a korelace: Nechť $\mathsf{E}X^2 < \infty$, $\mathsf{E}Y^2 < \infty$. Kovariance $\mathsf{Cov}\,(X, Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$\mathsf{Cov}\,(X, Y) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y) = \mathsf{E}(XY) - (\mathsf{E}X)(\mathsf{E}Y).$$

Koeficient korelace $\mathsf{cor}(X, Y) = \rho_{XY}$ je definován jako

$$\rho_{XY} = \frac{\mathsf{Cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}\,X}\sqrt{\mathsf{Var}\,Y}},$$

je-li $\mathsf{Var}\,X, \mathsf{Var}\,Y > 0$. Platí vždy $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Beta funkce. V některých výpočtech se může hodit tzv. beta funkce definovaná jako

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx,$$

pro kterou platí

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}.$$