Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

8.3.2018 a 12.3.2018

1. V kapse máte dvě padesátikoruny, jednu dvacetikorunu a jednu desetikorunu. Zloděj Vám z kapsy náhodně vybere dvě mince. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   (a) Určete rozdělení X a spočtěte Vaši očekávanou ztrátu.
   (b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X. Vyčtěte z ní pravděpodobnost, že Vaše ztráta není větší než 50 Kč.
   Jaké jsou obecné vlastnosti distribuční funkce?
   (c) Zloděj si následně koupí kávu z automatu za 20 Kč a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a očekávanou hodnotu Y.
   (d) Určete rozptyl veličiny Y. Jaký je vztah mezi $\mathsf{Var}\, Y$ a $\mathsf{Var}\, X$?

2. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, kde $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ a $\mathsf{P}(\{1, 2\}) = \mathsf{P}(\{3, 4\}) = 1/2$. Na tomto prostoru uvažujme reálné funkce X a Y definované následovně: $X(1) = X(2) = 1$, $X(3) = X(4) = 2$, $Y(1) = Y(2) = Y(3) = 1$, $Y(4) = 2$. Rozhodněte, zda jsou tyto funkce náhodnými veličinami.

3. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Odvoďte rozdělení veličiny X. Jak se toto rozdělení nazývá? (Znáte ho z přednášky.)
   (b) Jaký je střední (očekávaný) počet správně zpodpovězených otázek?
   (c) Jaký je rozptyl počtu správně zpodpovězených otázek?
   Návod: namísto $\mathsf{E}X^2$ *spočtěte* $\mathsf{E}X(X-1)$ *a využijte, že platí* $\mathsf{E}X^2 = \mathsf{E}X(X-1) + \mathsf{E}X$.
   (d) Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví alespoň jednu otázku správně?
   (e) Jaký by byl střední počet a rozptyl správně zpodpovězených otázek, kdyby na každou otázku bylo k možných odpovědí a z nich vždy právě jedna správná? Pro jaké k je rozptyl maximální?

4. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots,$ kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Určete očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu.
   (c) Určete rozptyl X.

5. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).
   (a) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.
   (b) Předpokládejme, že výhra v dané loterii je 100 000 Kč a jeden los stojí 100 Kč. Jaké musí být alespoň p, aby se nám celá naše strategie vyplatila?

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X je pravděpodobnostní míra P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že pro $B \in \mathcal{B}$ je $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\})$.
  - Rozdělení je jednoznačně určeno **distribuční funkcí**, která je funkcí reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ a je definovaná jako $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$.
  - Distribuční funkce je vždy neklesající, zprava spojitá s limitou 0 v $-\infty$ a limitou 1 v ∞.
  - Platí $\mathsf{P}(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ pro libovolné $a < b$.

- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $\mathsf{E}X = \int_\Omega X(\omega) \mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X.
  Rozptyl veličiny X je definován jako
  $$\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$
  (jestliže $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{E}X^2$ existují). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí
  $$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2 \mathsf{Var}\, X.$$

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností nejvýše spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má diskrétní rozdělení.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.

- **Distribuční funkce** je po částech konstantní se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.

- **Střední hodnota** X se spočítá jako
  $$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li).}$$
  Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako
  $$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k) \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k \quad \text{(existuje-li),}$$
  nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}Y = \sum_y y \mathsf{P}(Y = y)$.

Užitečné vzorce

– Binomická věta: Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathsf{N}$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)} = (a + b)^n$.

– Pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$.

– Je-li $|q| < 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$. Derivováním podle q dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.