Klasická pravděpodobnost

22.2.2018

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   (a) padnou čtyři různá čísla,
   (b) padnou pouze lichá čísla,
   (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
   (d) součet čísel bude větší než 5,
   (e) padne alespoň jedna šestka.

2. Z balíčku 32 karet náhodně vybereme čtyři karty (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli alespoň dvě esa?

3. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (s již nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.

4. (**Maxwellovo-Boltzmannovo schéma.**)
   Na cvičení z Pravděpodobnosti a matematické statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.
   (a) Určete pravděpodobnost, že na cvičení ve čtvrtek příjde právě k studentů.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že na každém cvičení bude alespoň jeden student?
   (c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

5. (**Boseovo-Einsteinovo schéma.**)
   Babička rozděluje r tisícikorun do n obálek pro svých n vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).
   (a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Adam dostane právě k tisícikorun.
   (b) Určete pravděpodobnost, že každé vnouče dostane alespoň nějaké peníze.
   (c) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

Opakování

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$
kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)
$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum\sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$