Intervalové odhady
16.5. a 17.5. 2019

1. Provedli jsme měření IQ náhodně vybraných žáků 8. třídy a obdrželi jsme následující hodnoty:

   111, 116, 105, 111, 110, 114, 108, 106, 112, 108, 112, 111, 105, 111, 108, 110.

   Zajímá nás intervalový odhad neznámé střední hodnoty IQ žáků 8. třídy.

   (a) Uvažujte model, ve kterém naše data pochází z normálního rozdělení. Sestrojte přesný intervalový odhad o spolehlivosti $1-\alpha$ pro střední hodnotu IQ žáků 8.třídy. Interpretujte.
   (b) Rozhodněte, jak se bude interval z (a) měnit, budeme-li zvyšovat spolehlivost $1-\alpha$. Jak se bude tento interval měnit, budeme-li zvyšovat počet dětí zahrnutých do experimentu (a ostatní hodnoty ve vzorcích zůstanou stejné)?
   (c) Sestrojte asymptotický intervalový odhad střední hodnoty IQ žáků 8.třídy. Jaký model zde stačí předpokládat?
   (d) Porovnejte intervaly z (a) a (c).
   (e) Napište pro oba modely i 95%-ní dolní intervalový odhad pro střední IQ žáků 8.třídy a interpretujte.

2. Počty vstřelených gólů v jednotlivých fotbalových zápasech jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s neznámým parametrem $\lambda > 0$. Pro data z roku 2008 máme k dispozici 306 zápasů, kde bylo vstřeleno v průměru 2.92 gólů a směrodatná odchylka vyšla 1.64.

   (a) Zkonstruujte intervalový odhad se spolehlivostí 95 % pro střední počet vstřelených gólů v jednom zápase.
   (b) Zkonstruujte 95%-ní intervalový odhad pro pravděpodobnost, že v zápase nepadne žádný gól.
   (c) Navrhněte ještě alternativní intervalový odhad pravděpodobnosti, že v zápase nepadne žádný gól, víme-li, že v 15 zápasech z celkových 306 nepadl žádný gól. Porovnejte s výsledkem z (b).

3. Předpokládejme, že délky obsluhy jednotlivých zákazníků na poště (v minutách) jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s neznámým parametrem $\lambda > 0$, tj. s hustotou $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} I[x \geq 0]$. Délka obsluhy 16 po sobě jdoucích zákazníků trvala 25 minut.

   (a) Sestrojte 95%-ní intervalový odhad pro střední dobu obsluhy jednoho zákazníka na poště.
   (b) Sestrojte 95%-ní intervalový odhad pro λ.
   (c) Sestrojte 95%-ní intervalový odhad pravděpodobnosti, že délka obsluhy bude trvat méně než 2 minuty.

4. Bylo provedeno měření IQ náhodně vybraných žáků ZŠ, a to u 50 děvčat a 50 chlapců. Pro děvčata bylo naměřeno průměrné IQ 110,82 (výběrová směrodatná odchylka 13,69) a pro chlapce byl průměr 107,66 (výběrová směrodatná odchylka 15,71).
   (a) Zkonstruujte interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot IQ dívek a chlapců. Uvažujte spolehlivost 95 %.
   (b) Pokrývá tento interval nulu? Co by to znamenalo, kdyby jej nepokrýval?

5. Náhodná veličina X má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}x & x \in [0, a], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

   kde $a > 0$ je neznámý parametr. Provedli jsme $n = 100$ nezávislých opakovaných měření a obdrželi jsme náhodný výběr $X_1, \dots, X_{100}$ takový, že $\overline{X}_{100} = 4/9$.
   (a) Sestrojte intervalový odhad střední hodnoty $\mathsf{E}X$ se spolehlivostí 95 %.
   (b) Sestrojte intervalový odhad parametru a se spolehlivostí 95 %.

6. Uvažujme fiktivní anketu o volebních preferencích před volbami prezidenta, ve které ze 100 náhodně dotázaných respondentů (kteří plánují jít k volbám) 35 odpovědělo, že bude v blížících se volbách volit kandidáta A.
   (a) Zkonstruujte intervalový odhad se spolehlivostí 95 % pro pravděpodobnost p, s jakou občan ČR (jdoucí k volbám) volí kandidáta A. Je pravděpodobné, že bude kandidát A zvolen v prvním kole?
   (b) Jestliže podíl voličů zůstane stejný jako v (a), kolik osob se musíme zeptat, aby šířka intervalového odhadu byla maximálně 2%?

Tabulka kvantilů $\mathsf{N}(0,1)$

α	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
u_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Tabulka vybraných kvantilů t_k rozdělení

$k \setminus \alpha$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626

Model: $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení F_θ, které závisí na neznámém parametru $\theta \in \Theta$.

Intervalový odhad parametrické funkce $g(\theta)$ o spolehlivosti $1-\alpha$ je interval s **náhodnými mezemi**, který **pokrývá** skutečnou (neznámou) hodnotu $g(\theta)$ s předepsanou pravděpodobností $1-\alpha$, kde $\alpha \in (0,1)$. V praxi většinou volíme $\alpha = 0.05$.

– Oboustranný intervalový odhad je dvojice náhodných veličin (L_n, U_n), kde $L_n = L_n(X_1, \dots, X_n)$ a $U_n = U_n(X_1, \dots, X_n)$ tak, že

$$\mathsf{P}_\theta(L_n < g(\theta) < U_n) \geq 1 - \alpha \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

– Dolní intervalový odhad je tvaru (D_n, ∞), kde náhodná veličina $D_n = D_n(X_1, \dots, X_n)$ splňuje

$$\mathsf{P}_\theta(D_n < g(\theta)) \geq 1 - \alpha \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

– Horní intervalový odhad je tvaru $(-\infty, H_n)$, kde veličina $H_n = H_n(X_1, \dots, X_n)$ splňuje

$$\mathsf{P}_\theta(g(\theta) < H_n) \geq 1 - \alpha \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

Poznámka: Všechny uvažované funkce L_n, U_n, D_n a H_n jsou borelovské funkce náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$, jejichž funkční předpisy nezávisí na θ.

Asymptotický intervalový odhad. Někdy je obtížné nalézt přesný intervalový odhad a spokojíme se s **asymptotickým intervalovým odhadem**, který pokrývá $g(\theta)$ s pravděpodobností konvergující k $1-\alpha$ pro $n \to \infty$. Např. pro oboustranný odhad pak požadujeme

$$\mathsf{P}_\theta(L_n < g(\theta) < U_n) \to 1 - \alpha, \quad n \to \infty \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

Mluvíme pak o intervalových odhadech s asymptotickou spolehlivostí $1 - \alpha$.

Obecná konstrukce intervalového odhadu pro parametrickou funkci $g(\theta)$. Najdeme funkci náhodného výběru a funkce $g(\theta)$, tj. náhodnou veličinu $h(X_1, \dots, X_n; g(\theta))$, jejíž rozdělení (resp. asymptotické rozdělení) nezávisí na θ. Nechť $h_{\alpha/2}$ a $h_{1-\alpha/2}$ jsou kvantily tohoto rozdělení. Pak jistě platí

$$\mathsf{P}_\theta \left(h_{\alpha/2} < h(X_1, \dots, X_n; g(\theta)) < h_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

Je-li možné nerovnosti v závorce převést ekvivalentními úpravami na takový tvar, že uprostřed stojí $g(\theta)$ a vlevo i vpravo je něco, co na θ nezávisí, sestrojili jsme intervalový odhad.

Speciální případy.

– Intervalové odhady pro parametry **normálního rozdělení**.

– **Asymptotické intervalové odhady** konstruované pomocí CLV.

Intervalové odhady v normálním rozdělení. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$ je neznámé.

1. Nechť $\sigma^2 > 0$ je známé. Pak ke konstrukci intervalového odhadu pro μ využijeme, že $\overline{X}_n$ má $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2/n)$ rozdělení. Tudíž $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$ má $\mathsf{N}(0,1)$ a platí
$$\mathsf{P}\left(-u_{1-\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} < u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$
kde $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ je kvantil $\mathsf{N}(0,1)$ na hladině $1-\alpha/2$. Odtud pak již snadno ekvivalentními úpravami získáme intervalový odhad μ.

2. Nechť $\sigma^2 > 0$ je neznámé. Připomeňme, že $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.
   - Pro odhad μ využijeme, že $T = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}$ má t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou tabelovány; pro n dostatečně velké je lze aproximovat kvantily $\mathsf{N}(0,1)$.
   - Pro odhad σ^2 využijeme, že $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ má χ^2 rozdělení s $n-1$ stupni volnosti a tedy platí
   $$\mathsf{P}(\chi^2_{\alpha/2,n-1} < (n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha,$$
   kde $\chi^2_{\beta,k}$ je β-kvantil χ^2 rozdělení s k stupni volnosti.

Asymptotický intervalový odhad pro střední hodnotu. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\mu = g(\theta)$ a rozptylem $\mathsf{var}\, X_1 \in (0, \infty)$. Pak
$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\mathsf{var}\, X_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \mathsf{N}(0,1).$$

Pokud $\mathsf{var}\, X_1$ známe, pak pro konstrukci intervalového odhadu μ postupujeme stejně jako v 1. u normálního rozdělení. V praxi ale většinou $\mathsf{var}\, X_1$ neznáme. Ze Sluckého věty (též Cramérova-Sluckého věta, věta 4.14 ve skriptech) plyne, že
$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{V_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \mathsf{N}(0,1),$$

kdykoliv je V_n konzistentní odhad $\mathsf{var}\, X_1$. Za tento konzistetní odhad V_n můžeme brát například:

- Výběrový rozptyl S_n^2 (univerzální postup).
- Pokud $\mathsf{var}\, X_1 = v(\mu)$ je funkcí μ (např. Alt, Po, Exp), pak můžeme využít toho, že $\overline{X}_n$ je konzistentním odhadem μ, a vzít $V_n = v(\overline{X}_n)$ jako konzistentní odhad $\mathsf{var}\, X_1$.

  Např. v $\mathsf{Alt}(p)$ je $\mathsf{var}\, X_1 = p(1-p) = v(p)$ a tedy $V_n = v(\overline{X}_n) = \overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$ je konzistentní odhad $\mathsf{var}\, X_1$.