Borelova a Cantelliho věta

4.4. a 5.4. 2019

1. Nekonečně krát hodíme symetrickou šestistěnnou kostkou. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) padne šestka v nekonečně mnoha hodech,
   (b) padne šestka ve všech až na konečně mnoho hodů,
   (c) padne nekonečně krát 100 šestek za sebou.
2. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor takový, že $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}[0,1]$ a P je Lebesgueova míra na $[0,1]$. Definujme jevy A_n jako $A_n = [0, 1/n]$. Určete $\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
3. Nechť $X_1, X_2 \ldots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Určete, s jakou pravděpodobností
   (a) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_i \geq \ln i^2]$,
   (b) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_1 \geq \ln i^2]$,
   (c) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_i \geq \ln i]$,
   (d) pro nekonečně mnoho i nastane jev $A_i = [X_1 \geq \ln i]$.
4. Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro které $\mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^\alpha$ a $\mathsf{P}(X_n = 1) = 1/n^\alpha$, kde $\alpha > 0$.
   (a) Zjistěte, zda X_n konverguje k 0 v pravděpodobnosti.
   (b) Zjistěte, pro která α konverguje X_n k 0 skoro jistě.

Definice. Nechť $A_1, A_2, \dots$ je posloupnost náhodných jevů. Označme

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Jev $\limsup_{n\to\infty} A_n$ znamená, že nastalo nekonečně mnoho jevů A_n, jev $\liminf_{n\to\infty} A_n$ znamená, že nastanou všechny A_n až na konečně mnoho.

Příklad: Nechť $\Omega = \{0,1\}$ a uvažujme posloupnost jevů $\{0\},\{1\},\{0\},\{1\},\{0\},\{1\},\dots$, pak jejich lim sup je $\{0,1\}$ a jejich lim inf je $\emptyset$.

0-1 zákony:

– Cantelliho věta: Je-li $\{A_n\}$ posloupnost jevů takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$, pak

$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

– Borelova věta: Nechť je $\{A_n\}$ posloupnost **nezávislých** jevů. Pak

$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty,$$
$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty.$$

Konvergence náhodných veličin Nechť $X_1, X_2, \dots$ a X jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Řekneme, že X_n konverguje k X skoro jistě pro $n \to \infty$, značíme $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} X$, jestliže

$$\mathsf{P}\left(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

Řekneme, že X_n konverguje k X v pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, značíme $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right) = 0.$$