Náhodné vektory II.

28. 3. a 29. 3. 2019

1. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X + Y$, jestliže
   (a) X, Y mají exponenciální rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$,
   (b) X, Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.
2. Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ v příkladě 2 z minulého cvičení měl sdružené rozdělení s hustotou $f(x, y) = x + y$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.
   (a) Určete rozdělení veličiny $Z = X + Y$.
   (b) Spočtěte $\mathsf{E}\, Z$ a $\mathsf{var}\, Z$.
   (c) Určete rozdělení a střední hodnotu náhodného vektoru $(Z, W)^\top$, kde $W = X - Y$.
   (d) Určete rozdělení veličiny $W = X - Y$, její střední hodnotu a rozptyl.
   (e) Určete střední hodnotu veličiny $U = \dfrac{1}{X + Y}$.
   (f) Spočtěte korelační koeficient Z a W.
3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se spojitým rozdělením s distribuční funkcí F. Označme $U = \max_{1\le i\le n} X_i$ a $V = \min_{1\le i\le n} X_i$.
   (a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
   (b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
   (c) Pro speciální případ, kdy F odpovídá rovnoměrnému rozdělení na $[0, 1]$, spočtěte i střední hodnotu U a V.
4. V daný den přijde do školy X dívek a Y chlapců, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.
   (a) Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
   (b) Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem n žáků?
5. Nechť jsou X, Y nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[1, 2]$.
   (a) Určete rozdělení veličiny $Z = \dfrac{X}{Y}$.
   (b) Určete rozdělení veličiny $W = XY$.
6. (a) Jaké je rozdělení $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, kde $X_i \sim \mathsf{Po}(\lambda)$ jsou nezávislé?
   (b$\star$) Jaká je hustota $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, kde $X_i \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ jsou nezávislé?

Nechť $(X,Y)^\top$ má sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$.

(i) Zajímá-li nás rozdělení náhodného vektoru $(U,V)^\top = g(X,Y) = (g_1(X,Y), g_2(X,Y))^\top$, použijeme větu o transformaci (lze-li).

(ii) Zajímá-li nás rozdělení náhodné veličiny $W = t(X,Y)$, kde $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, použijeme nejprve větu o transformaci na „doplněný" náhodný vektor $(W,V)^\top$, kde V je např. X nebo Y nebo jiná vhodná funkce X a Y. Tím získáme sdružené rozdělení $(W,V)^\top$, z něhož pak obvyklým způsobem získáme marginální rozdělení W.

(iii) Pro speciální případ $t(X,Y) = X+Y$ není nutné použít postup v (ii) a je možné rovnou využít vztah pro rozdělení součtu dvou náhodných veličin.

Věta o transformaci. Nechť $(X,Y)^\top$ má sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$ a nechť $(U,V)^\top = g(X,Y)$. Nechť S je otevřená množina, taková že $\mathsf{P}((X,Y)^\top \in S) = 1$ a $g : S \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení, tj. $g \in C^1(S)$ a $J_g(x,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$, pro všechna $(x,y)^\top \in S$. Pak má náhodný vektor $(U,V)^\top$ spojité rozdělení s hustotou h, která je rovna

$$h(u,v) = \begin{cases} f(g^{-1}(u,v)) \cdot |J_{g^{-1}}(u,v)| & \text{pro } (u,v) \in g(S), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $J_{g^{-1}}$ je Jakobián funkce g^{-1}.

Rozdělení součtu náhodných veličin: Nechť má náhodný vektor $(X,Y)'$ sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x,y)$. Potom má veličina $Z = X+Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(y-z, y)\,\mathrm{d}y.$$

Speciálně, jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X+Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Vlastnosti momentů. Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \,\mathsf{E}\, X_i$,
- $\mathsf{var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \,\mathsf{var}\, X + \sum\sum_{i \neq j} a_i\, a_j \,\mathsf{cov}\,(X_i, X_j)$,
- $\mathsf{cov}\,(a_1 X_1 + a_2 X_2, a_3 X_3) = a_1\, a_3 \,\mathsf{cov}\,(X_1, X_3) + a_2\, a_3 \,\mathsf{cov}\,(X_2, X_3)$.