Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

7. 3. 2019 a 8. 3. 2019

1. V první truhle jsou 2 zlaté a 2 stříbrné mince, v druhé truhle je 1 zlatá a 2 stříbrné mince. Náhodně vybereme jednu truhlu a z ní dvě mince. Náhodná veličina X udává počet takto vytažených zlatých mincí.
   (a) Určete rozdělení X.
   (b) Zapište míru P_X a nakreslete distribuční funkci X.
   (c) Spočtěte očekávaný počet vytažených zlatých mincí. Určete dále i rozptyl.
   (d) Za každou zlatou minci dostanete v zastavárně 100 Kč. Označme jako Y částku, kterou ve výsledku získáte. Určete její rozdělení, střední hodnotu a rozptyl.

2. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, kde $\Omega = \{1,2,3,4\}$ a $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \Omega\}$ a $\mathsf{P}(\{1,2\}) = \mathsf{P}(\{3,4\}) = 1/2$. Na tomto prostoru uvažujme reálné funkce X a Y definované následovně: $X(1) = X(2) = 1$, $X(3) = X(4) = 2$, $Y(1) = Y(2) = Y(3) = 1$, $Y(4) = 2$. Rozhodněte, zda jsou tyto funkce náhodnými veličinami.

3. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = ((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$, kde λ je Lebesgueova míra. Náhodná veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $X(\omega) = \mathrm{I}(\omega < p)$, kde $p \in (0,1)$ je dané číslo.
   (a) Určete rozdělení (pravděpodobnostní míru) P_X a distribuční funkci F.
   (b) Určete střední hodnotu a rozptyl X.

4. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
   (a) Odvoďte rozdělení veličiny X.
   (b) Jaký je střední (očekávaný) počet správně zpodpovězených otázek?
   (c) Jaký je rozptyl počtu správně zpodpovězených otázek?
   (d) Za každou správně zodpovězenou otázku dostane student a bodů a za každou špatně zodpovězenou dostane -1 bod. Určete a tak, aby při dané strategii (náhodné zaškrtávání odpovědí) byl očekávaný celkový počet bodů roven nule.
   (e) Jaký by byl střední počet a rozptyl správně zpodpovězených otázek, kdyby na každou otázku bylo k možných odpovědí a z nich vždy právě jedna správná? Pro jaké k je rozptyl maximální?

5. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots,$ kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení a určete očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu.
   (b) Určete rozptyl X.

6. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0,1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme). Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X je pravděpodobnostní míra P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že pro $B \in \mathcal{B}$ je $P_X(B) = \mathsf{P}(X \in B) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$.
  - Rozdělení je jednoznačně určeno **distribuční funkcí**, která je funkcí reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ a je definovaná jako $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$.
  - Distribuční funkce je vždy neklesající, zprava spojitá s limitou 0 v $-\infty$ a limitou 1 v ∞.
  - Platí $\mathsf{P}(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ pro libovolné $a < b$.

- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $\mathsf{E}\, X = \int_\Omega X(\omega) \mathrm{d}\mathsf{P}(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X.
  Rozptyl veličiny X je definován jako
  $$\mathsf{var}\, X = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}\, X)^2 = \mathsf{E}\, X^2 - (\mathsf{E}\, X)^2$$
  (jestliže $\mathsf{E}\, X^2 < \infty$). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí
  $$\mathsf{E}\,(a + bX) = a + b\,\mathsf{E}\, X, \quad \mathsf{var}\,(a + bX) = b^2\, \mathsf{var}\, X.$$

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností nejvýše spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má diskrétní rozdělení.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.

- **Distribuční funkce** je po částech konstantní se skoky o velikosti p_k v bodech x_k.

- **Střední hodnota** X se spočítá jako
  $$\mathsf{E}\, X = \sum_k x_k\, \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k\, p_k \qquad \text{(existuje-li).}$$
  Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako
  $$\mathsf{E}\, Y = \mathsf{E}\ h(X) = \sum_k h(x_k)\, \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k)\, p_k \quad \text{(existuje-li),}$$
  nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}\, Y = \sum_y y\, \mathsf{P}(Y = y)$.

Užitečné vzorce
- Binomická věta: Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)} = (a + b)^n$.
- Pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$.
- Je-li $|q| < 1$, pak $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1 - q}$. Derivováním podle q dostaneme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} = \dfrac{1}{(1 - q)^2}$.