Klasická pravděpodobnost

21. 2. a 22. 2. 2019

1. Z balíčku 32 karet náhodně vybereme postupně čtyři karty (s vracením).
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli čtyři různé karty?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli právě dvě esa?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli alespoň dvě esa?
   (d) Jak by se změnili pravděpodobnosti z (a), (b), (c), pokud bychom tahy prováděli bez vracení?

2. Uvažujme n různých dopisů, jimž odpovídá n různých obálek (každý dopis patří do právě jedné obálky). Avšak zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.

3. (**Maxwellovo-Boltzmannovo schéma.**)
   Na cvičení z Pravděpodobnosti a matematické statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.
   (a) Určete pravděpodobnost, že na cvičení ve čtvrtek ve 14:00 přijde právě k studentů.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že na každém cvičení bude alespoň jeden student?
   (c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

4. (**Boseovo-Einsteinovo schéma.**)
   Babička se chystá rozdělit r tisícikorun mezi svých n vnoučat.
   (a) Kolika různými způsoby může babička peníze rozdělit? (Dvě rozdělení peněz jsou stejná, pokud je stejný celkový obnos každého z vnoučat.)
   (b) Babička si všechny možné různé způsoby rozdělení peněz z bodu (a) zapsala a následně jedno z nich náhodně vybrala a podle toho peníze rozdělila. Určete pravděpodobnost, že nejstarší vnuk Adam dostane právě k tisícikorun.
   (c) Určete pravděpodobnost, že každé vnouče dostane alespoň nějaké peníze.
   (d) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (b) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

5. Uvažujme třídu n osob. Jaká je pravděpodobnost, že v této třídě existují dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den? Kolik nejméně osob musí být ve třídě, aby tato pravděpodobnost byla vyšší než 90%?
   (Pro jednoduchost uvažujme, že rok má 365 dní a že se lidé rodí rovnoměrně během roku).

Opakování

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$
kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum\sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \sum\sum\sum_{i<j<k} \mathsf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$