Stacionární rozdělení a vnořený řetězec

3.5.2018

1. Uvažujme obchod se třemi prodavačkami. Zákazníci přicházejí do obchodu dle Poissonova procesu s intenzitou λ. Doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou μ. Jsou-li všechny prodavačky zaneprázdněné, zákazník odchází neobsloužen (netvoří se fronta). Určete rozdělení počtu obsluhujících prodavaček v ustáleném režimu. Pro $\lambda = 2$ a $\mu = 3$ spočtěte i střední počet obsluhujících prodavaček v ustáleném režimu.

2. Uvažujme homogenní Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s maticí intenzit
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ pq & -p & p^2 & 0 & 0 & \dots \\ p^2q & 0 & -p^2 & p^3 & 0 & \dots \\ p^3q & 0 & 0 & -p^3 & p^4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$
kde $0 < p < 1$ a $q = 1 - p$.
   (a) Napište matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.
   (b) Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.
   (c) Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení $\{X_t, t \geq 0\}$.

3. Uvažujme homogenní Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ s maticí intenzit
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$
   (a) Určete matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce a klasifikujte jeho stavy. Určete jeho stacionární rozdělení, pokud existuje.
   (b) Určete stacionární rozdělení $\{X_t, t \geq 0\}$.

4. Na poště na Karlíne fungují pouze dvě přepážky. Předpokládejme, že příchody zákazníků na poštu tvoří Poissonův proces. Pokud jsou všechny přepážky obsazeny, řadí se zákazníci do jedné společné fronty, která může být libovolně dlouhá. Dále lze předpokládat, že doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou půl minuty. Najděte stacionární rozdělení počtu zákazníků na poště (u přepážek a ve frontě dohromady), pokud zákazníci přicházejí v průměru každou minutu.

5. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec s maticí intenzit $\mathbf{Q}$ a nechť $V = \mathrm{diag}\{q_i\}_{i \in S}$.
   (a) Nechť $\boldsymbol{\pi}^*$ je stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Ukažte, že pak $\boldsymbol{\eta} = V^{-1}\boldsymbol{\pi}^*$ je invariantní míra $\{X_t, t \geq 0\}$.
   (b) Nechť $\boldsymbol{\eta}$ je invariantní míra $\{X_t, t \geq 0\}$. Pak pro $\boldsymbol{\eta}^* = V\boldsymbol{\eta}$ platí $\boldsymbol{\eta}^{*T}\mathbf{Q}^* = \boldsymbol{\eta}^{*T}$.

Stacionární rozdělení Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticemi pravděpodobností přechodů $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$. Nechť je vnořený řetězec $\{Y_n\}$ nerozložitelný a všechny jeho stavy jsou trvalé. Pak existuje invariantní míra $\{X_t\}$, která je určena jednoznačně (až na multiplikativní konstantu) jako řešení rovnice

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$$

a $0 < \eta_j < \infty$ pro všechna $j \in S$.
Je-li $\sum_{j \in S} \eta_j < \infty$, pak $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}_{j \in S}$, kde $\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_{k \in S} \eta_k}$, je stacionární rozdělení $\{X_t\}$ a platí

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \text{ pro všechna } i, j \in S, \quad \lim_{t \to \infty} p_j(t) = \pi_j, \text{ pro všechna } j \in S.$$

Příklad. Uvažujme spojitý HMŘ s maticí intenzit $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta > 0$. Pak jsme již spočítali, že

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-t(\alpha+\beta)} & \alpha - \alpha e^{-t(\alpha+\beta)} \\ \beta - \beta e^{-t(\alpha+\beta)} & \alpha + \beta e^{-t(\alpha+\beta)} \end{pmatrix}.$$

Je-li $p(0) = (p_0, p_1)^T$ počáteční rozdělení, pak pro absolutní pravděpodobnost v čase t platí $p(t)^T = p(0)^T \mathbf{P}(t)$. Je-li $p(t) = (p_0(t), p_1(t))^T$, pak

$$p_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha + \beta}(p_0 \alpha - p_1 \beta), \quad p_1(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha + \beta}(-p_0 \alpha + p_1 \beta).$$

Pro $t \to \infty$ máme $p(t) \to \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta, \alpha)^T$, což je limitní (stacionární) rozdělení daného řetězce, které lze spočíst i řešením $\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{Q} = 0$. Nezávisle na počátečním rozdělení $p(0)$ se po nějakém čase t řetězec „ustálí“ na tomto stacionárním rozdělení. Proto také někdy hovoříme o tzv. ustáleném režimu.