MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM
26.4.2018

1. Na stavbě pracuje N svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase t neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t+h]$ proud odebírat s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$. Svářeč, který v čase t proud odebíral, ukončí odběr v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Nechť X_t značí počet svářečů, kteří v čase t odebírají proud. Předpokládejme, že $X_0 = 0$.
   (a) Jaké je rozdělení doby čekání na začátek odběru jednoho konkrétního svářeče?
   (b) Jaké je rozdělení doby setrvání řetězce v počátečním stavu 0?
   (c) Podobně uvažujte dobu setrvání řetězce ve stavu 1. Jaké má rozdělení a střední hodnotu?
   (d) Uvažujte vnořený řetězec $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Napište jeho matici pravděpodobností přechodu. Uvědomte si souvislost s vlastnostmi exponenciálního rozdělení.
   (e) Spočítejte stacionární rozdělení $\{X_t, t \geq 0\}$.

2. Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase $t = 0$ je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že je-li zdravý jedinec v kontaktu s nemocným v čase t, pak ten zdravý onemocní v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $1/2h + o(h)$. Jedinec nemocný v čase t se naopak v intervalu $(t, t+h]$ uzdraví s pravděpodobností $1/3h + o(h)$. Uzdravování a onemocnení jednotlivých jedinců probíhá nezávisle, nemoc je možné dostat opakovaně, má nulovou inkubační dobu a zdravý jedinec nemůže nikoho nakazit. Nechť X_t je počet nemocných kamarádů na chatě v čase t.
   (a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.
   (b) Určete matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce.

3. V čase $t = 0$ máte ve své emailové schránce nula zpráv. V intervalu $(t, t+h]$ dorazí do Vaší emailové schránky jeden email s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$; dva a více emailů s pravděpodobností $o(h)$, a to nezávisle na t. Počty emailů, které dorazí v disjunktních časových intervalech jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Označme jako N_t počet emailů ve Vaší schránce v čase t.
   (a) Napište matici intenzit Markovova řetězce $\{N_t, t \geq 0\}$.
   (b) Ověřte, že N_t má Poissonovo rozdělení s parametrem λt.
   (c) Napište matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce a klasifikujte jeho stavy.
   (d) V čase t máte ve schránce jeden email. Jaké je podmíněné rozdělení doby, kdy tento email dorazil?

4. Nechť $\{N_t, t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Nechť X_t je identifikátor toho, zda je N_t liché číslo.
   (a) Ukažte, že $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec.
   (b) Určete matice pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$ a matici intenzit $\mathbf{Q}$.
   (c) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{Q}^*$ vnořeného řetězce a v obou řetězcích spočtěte stacionární rozdělení.

Vnořený řetězec. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticí intenzit $\mathbf{Q}$. Nechť $J_1, J_2, \ldots$ jsou po sobě jdoucí časové okamžiky, ve kterých dochází k přechodům mezi stavy tohoto řetězce. Definujme

$$Y_0 = X_0,$$
$$Y_n = X_{J_n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Pak $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá vnořený řetězec a je to homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{Q}^* = (Q^*_{ij})_{i,j \in S}$, kde

$$q^*_{ij} = \begin{cases} \dfrac{q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0, \\ 0, & q_i = 0 \end{cases} \text{ pro } j \neq i, \quad \text{a} \quad q^*_{ii} = \begin{cases} 0 & q_i > 0, \\ 1, & q_i = 0. \end{cases}$$

Je-li $0 < q_i < \infty$, pak doba setrvání ve stavu i má exponenciální rozdělení s intenzitou q_i.

Stacionární rozdělení Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticemi pravděpodobností přechodů $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$.

- Vektor $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i, i \in S\}$ se nazývá **invariantní míra** $\{X_t\}$ na S vzhledem k $\{P(t)\}$, pokud

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}(t) = \boldsymbol{\eta}^T, t \geq 0.$$

- Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi}$ na S, které je invariantní míra $\{X_t\}$, se nazývá **stacionární rozdělení** $\{X_t\}$.
- Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{a} = \{a_i, i \in S\}$ se nazývá limitní rozdělení, pokud $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$ pro všechna $i, j \in S$. Pokud existuje limitní rozdělení řetězce, je to stacionární rozdělení.
- Nechť je vnořený řetězec $\{Y_n\}$ nerozložitelný a všechny jeho stavy jsou trvalé. Pak existuje invariantní míra $\{X_t\}$, která je určena jednoznačně (až na multiplikativní konstantu) jako řešení rovnice

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$$

  a $0 < \eta_j < \infty$ pro všechna $j \in S$.
  Je-li $\sum_{j\in S} \eta_j < \infty$, pak $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}_{j \in S}$, kde

$$\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_{k\in S} \eta_k},$$

  je stacionární rozdělení $\{X_t\}$ a platí

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \text{ pro všechna } i, j \in S, \quad \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j, \text{ pro všechna } j \in S.$$