Markovovy řetězce se spojitým časem
19.4.2018

1. (Pokračování z minula.) Nechť
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Spočtěte $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$ pro všechna $t > 0$ pomocí Perronova vzorce.
   (b) Spočtěte $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$ pomocí spektrálního rozkladu matice $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$.
   (c) Nalezněte $\mathbf{P}(t)$ jako řešení soustavy diferenciálních rovnic $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$.

2. Na stavbě pracuje N svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase t neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t+h]$ proud odebírat s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$. Svářeč, který v čase t proud odebíral, ukončí odběr v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Nechť X_t značí počet svářečů, kteří v čase t odebírají proud.
   (a) Najděte matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.
   (b) Pro $N = 1$ určete absolutní pravděpodobnosti v čase t, jestliže na začátku v čase 0 proud neodebíral žádný svářeč s pravděpodobností 1.

3. V obchodě pracují tři prodavačky. Pokud prodavačka právě někoho obsluhuje, pak pravděpodobnost, že zákazníka doobslouží v časovém intervalu $(t, t+h]$ a nikoho obsluhovat nebude, je $3h + o(h)$. V intervalu $(t, t+h]$ přijde jeden zákazník s pravděpodobností $2h + o(h)$, dva nebo více s pravděpodobností $o(h)$ a žádný s pravděpodobností $1 - 2h + o(h)$. Předpokládejme, že zákazníci přicházejí zaměstnávat jednotlivé prodavačky nezávisle a rovněž ony se chovají nezávisle na svých kolegyních. Pokud všechny prodavačky obsluhují, odchází nově příchozí zákazník neobsloužen. Nechť X_t značí počet obsluhujících prodavaček v čase t. Nalezněte matici intenzit řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.

4. Určete hodnoty parametru $q \in \mathbb{R}$, pro které je následující matice maticí intenzit nějakého homogeního Markovova řetězce se spojitým časem:
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q^3 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \\ 1 & -q & q-1 \end{pmatrix}.$$

Markovův řetězec se spojitým časem. Systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ se nazývá Markovův řetězec se spojitým časem a spočetnou množinou stavů S, jestliže

$$\mathsf{P}(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = \mathsf{P}(X_t = j | X_s = i)$$

pro všechna $i, j, i_1, \ldots, i_n \in S$ a všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < s < t$, pro která je pravděpodobnost podmínky nenulová.

- Budeme pracovat pouze s homogenními řetězci, tj. s řetězci, pro které platí $\mathsf{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) = p_{ij}(t)$ pro všechna $s \geq 0$ a $t > 0$. Pracujeme pak se systémem matic pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$, kde $\mathbf{P}(0) = I$.
- $p_i(t) = \mathsf{P}(X_t = i)$ jsou absolutní pravděpodobnosti, $p_i = \mathsf{P}(X_0 = i)$ jsou počáteční pravděpodobnosti. Platí $\mathbf{p}(t)^T = \mathbf{p}(0)^T \mathbf{P}(t)$.

Matice intenzit. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij}(t) = \mathsf{P}(X_{s+t} = j | X_s = i)$, $s \geq 0$, $t > 0$, $i, j \in S$, které splňují $\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ pro všechna $i, j \in S$ (tj. p_{ij} jsou zprava spojité v 0). Pak pro všechny stavy $i, j \in S$, $i \neq j$ existují limity

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = q_i = -q_{ii} \leq \infty, \quad \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij} < \infty. \tag{1}$$

Čísla q_{ij} se nazývají intenzity přechodu ze stavu i do stavu j, q_i je celková intenzita a $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ se nazývá matice intenzit přechodu.

- Je-li S konečná, pak nutně $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ pro všechna i. Pro nekonečné řetězce tuto rovnost musíme předpokládat.
- Je-li $q_i = 0$, pak $p_{ii}(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$.
- Je-li $0 < q_i < \infty$, pak má doba, po kterou řetězec setrvá ve stavu i, exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/q_i$. Pravděpodobnost, že ze stavu i přejde řetězec nejdříve do stavu j je q_{ij}/q_i pro $i \neq j$.

Kolmogorovovy diferenciální rovnice Nechť $q_i < \infty$ a $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$pro všechna $i \in S$. Potom platí tzv. retrospektivní rovnice

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).$$

Je-li S konečná nebo je-li konvergence $p_{ij}(h)/h \to q_{ij}$ stejnoměrná v i, pak platí i prospektivní rovnice

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)Q.$$

- Nechť je dána konečná matice $\mathbf{Q}_{N \times N}$ splňující $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ pro všechna i. Pak existuje jediné řešení Kolmogorovových dif. rovnic, stejné pro obě soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = I$ a které představuje systém pravděpodobností přechodu Markovova řetězce s maticí intenzit $\mathbf{Q}$. Platí

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}.$$

Značení. Výraz $f(h) = o(h)$ značí, že $f(h)/h \to 0$ pro $h \to 0+$.