Exponenciální rozdělení, Perronův vzorec

12.4.2018

1. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.
   (a) Dokažte, že pro všechna $s, t \geq 0$ platí
   $$\mathsf{P}(X > s + t | X > s) = \mathsf{P}(X > t). \tag{1}$$
   (b) Ukažte, že je-li X spojitá náhodná veličina splňující podmínku (1), pak má X exponenciální rozdělení.
   (c) Ukažte, že intenzita náhodné veličiny $X \geq 0$ je rovna konstantě (skoro všude) právě tehdy, když má X exponenciální rozdělení.
   (d) Dokažte, že náhodná veličina $Z = \min(X, Y)$ má exponenciální rozdělení a spočtěte jeho střední hodnotu.
   (e) Spočtěte $\mathsf{P}(X < Y)$.

2. Opakování:
   (a) Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\lambda$. Dokažte, že $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ má gamma rozdělení s hustotou
   $$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0.$$
   (b) Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením. Ukažte, že $Z = X + Y$ má také Poissonovo rozdělení.

3. Nechť
   $$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$
   kde $\alpha, \beta > 0$. Pomocí Perronova vzorce spočtěte matici $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$ pro všechna $t > 0$. Ukažte, že je $\mathbf{P}(t)$ stochastická a že platí
   $$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \quad \text{i} \quad \mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}.$$

4. Nechť
   $$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Spočtěte $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$ pro všechna $t > 0$.

Exponenciální rozdělení. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, značíme $\mathsf{Exp}(\lambda)$, pokud má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x \geq 0).$$

Pak $F(x) = [1 - e^{-\lambda x}] I(x \geq 0)$, $\mathsf{E} X = \frac{1}{\lambda}$ a $\mathsf{Var}\, X = \frac{1}{\lambda^2}$.

Intenzita náhodné veličiny. Nechť $X \geq 0$ má spojité rozdělení s hustotou f a distribuční funkcí F. Pak intenzitou X rozumíme funkci r definovanou pro $x > 0$ předpisem

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{\mathsf{P}(X > x)}.$$

Perronův vzorec pro holomorfní funkce. Nechť $f : U(0, R) \to \mathcal{C}$ je holomorfní funkce na nějakém R-okolí nuly, kde $0 < R \leq \infty$, a nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice s vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s násobnostmi $m_1, \ldots, m_k$. Pokud $|\lambda_j| < R$ pro všechna $j = 1, \ldots, k$, potom

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{d^{m_j - 1}}{d\lambda^{m_j - 1}} \left[f(\lambda) \frac{\mathrm{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})}{\psi_j(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_j}, \qquad \text{kde } \psi_j = \frac{\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}.$$

Jsou-li všechna vlastní čísla jednoduchá, pak

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) \frac{\mathrm{adj}(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})}{\psi_j(\lambda_j)}.$$