Klasifikace stavů Markovova řetězce
15.3.2018

1. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $\{-1, 0, 1\}$ a uvažujte $\{Y_n\}$, kde $Y_n = \max\{X_0, \dots, X_n\}$. Klasifikujte stavy $\{Y_n\}$.

2. Máme neomezenou zásobu kuliček a k přihrádek. V každém kroku vložíme jednu kuličku do náhodně vybrané přihrádky. Veličina X_n značí počet obsazených přihrádek v čase n. Ukažte, že $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec, určete jeho matici pravděpodobností přechodu a klasifikujte jeho stavy.

3. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí přechodu
$$\text{(a)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Uvažujte Markovův řetězec $\{X_n\}_0^\infty$ se stavy $S = \{1, 2\}$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = (p_{ij})$, kde $p_{12} = a$ a $p_{21} = b$ (viz minulá hodina).
   (a) Klasifikujte stavy řetězce.
   (b) Určete rozdělení času prvního návratu do stavu 1 a jeho střední hodnotu.
   (c) Určete stacionární rozdělení.

6. Je dán Markovův řetězec se stavy $\{0, 1, 2\}$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij} = 1/2$ pokud $i \neq j$ a $p_{ii} = 0$ (jedná se o náhodnou procházku na trojúhelníku).
   (a) Klasifikujte stavy řetězce. Jaká je střední doba návratu do stavu 0?
   (b) Spočtěte stacionární rozdělení

7. Uvažujme dvě urny, ve kterých je celkem k koulí očíslovaných $1, \dots, k$. V každém kroku náhodně zvolíme jedno číslo z $1, \dots, k$ a koule s daným číslem se přemístí do druhé urny. Počet koulí v urně představuje teplotu tělesa a přemístění koule výměnu tepla. Označme X_n počet koulí v první urně (tj. teplotu prvního tělesa) v čase n.
   (a) Ukažte, že $\{X_n\}$ tvoří homogenní Markovův řetězec, určete jeho matici pravděpodobností přechodu a klasifikujte jeho stavy.
   (b) Určete stacionární rozdělení.

8. Spočtěte stacionární rozdělení pro řetězce z 3(b), 3(c) a 4.

Definice a značení

- Zavedeme značení $\mathsf{P}_j(\cdot) = \mathsf{P}(\cdot|X_0 = j)$ a podobně pro $\mathsf{E}_j(\cdot)$.
- Definujme čas prvního vstupu (návratu) do stavu j jako

$$\tau_j(1) = \inf\{n > 0 : \ X_n = j\}$$

a jeho pravděpodobnostní rozdělení označíme jako

$$f_{ij}^{(n)} = \mathsf{P}_i(\tau_j(1) = n), \quad n = 1, 2, \dots$$

a $f_{ij}^0 = 0$. Dále označíme $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathsf{P}_i(\tau_j(1) < \infty)$.

Klasifikace stavů:

- Stav $j \in S$ se nazývá **přechodný**, pokud $\mathsf{P}_j(\tau_j(1) = \infty) > 0$, tj. řetězec se do stavu j s kladnou pravděpodobností nikdy nevrátí, pokud z něj startuje. V opačném případě, pokud $f_{jj} = \mathsf{P}_j(\tau_j(1) < \infty) = 1$, se stav j nazývá **trvalý**.

  Trvalý stav se nazývá **nenulový**, pokud $\mu_j = \mathsf{E}_j\tau_j(1) < \infty$, tj, pokud je střední doba návratu konečná. Je-li $\mu_j = \mathsf{E}_j\tau_j(1) = \infty$ pro trvalý stav j, pak se j nazývá **nulový**.

- Nechť d_j je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které $p_{jj}^{(n)} > 0$. Je-li $d_j > 1$, pak říkáme, že stav j je **periodický** s periodou d_j. Je-li $d_j = 1$, říkáme, že stav j je neperiodický.

Platí.

- Stav j je trvalý právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$.
- Trvalý stav j je nulový právě tehdy, když $p_{jj}^{(n)} \to 0$, $n \to \infty$.

Definice. Stav j je dosažitelný ze stavu i, pokud existuje $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. V opačném případě je stav j ze stavu i nedosažitelný. Řetězec, ve kterém jsou všechny stavy navzájem dosažitelné, se nazývá **nerozložitelný**. V opačném případě je rozložitelný.

Platí

- Jsou-li stavy i a j navzájem dosažitelné, pak jsou stejného typu.
- V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.
- Je-li j trvalý a k je dosažitelný z j, pak k je trvalý, j je dosažitelný z k a $f_{jk} = f_{kj} = 1$.
- V řetězci s konečně mnoha stavy nemohou být všechny stavy přechodné.
- V řetězci s konečně mnoha stavy neexistují nulové stavy.
- V nerozložitelném řetězci s konečně mnoha stavy jsou všechny stavy trvalé nenulové.

Stacionární rozdělení. Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a množinou stavů S. Nechť π je pravděpodobnostní rozdělení na S. Pak π nazveme stacionární rozdělení $\{X_n\}$, pokud platí

$$\pi^T\mathbf{P} = \pi^T.$$

- V konečném řetězci vždy existuje stacionární rozdělení. To je určeno jednoznačně právě tehdy, když jsou všechny trvalé stavy vzájemně dosažitelné.
- Je-li π stacionární rozdělení a $i \in S$ přechodný, pak $\pi_i = 0$.