Markovovy řetězce s diskrétním časem
8.3.2018

1. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení s $p_0 = P(U_{nj} = 0) = 1/5$, $p_1 = \mathsf{P}(U_{nj} = 1) = 1/5$ a $p_2 = \mathsf{P}(U_{nj} = 2) = 3/5$ a $X_0 = 1$.
   (a) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n-té generaci.
   (b) Spočtete pravděpodobnost, že populace vymře do času n pro $n = 1, 2$.
   (c) Určete pravděpodobnost, že populace časem vymře.
   (d) Jak se změní pravděpodobnost vymření z (c), bude-li $X_0 = 3$?

2. Ověřte, že Galtonův-Watsonův proces větvení je homogenní Markovův řetězec. Pro situaci z předchozího příkladu napište pravděpodobnosti přechodu ze stavů $0, 1, 2$.

3. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $\{-1, 0, 1\}$. Definujme $Y_n = \max\{X_0, \ldots, X_n\}$. Ukažte, že $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec a určete matice pravděpodobností přechodu všech řádů.

4. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $\{-1, 0, 1\}$ a uvažujme $Y_n = X_n + X_{n+1}$. Ukažte, že posloupnost $\{Y_n\}_0^{\infty}$ není Markovův řetězec.
   Nápověda: Uvažujte trajektorie $(2; 0; 2)$ *a* $(-2; 0; 2)$ *pro* $(Y_0; Y_1; Y_2)$.

5. Uvažujte Markovův řetězec $\{X_n\}_0^{\infty}$ s $S = \{0, 1\}$ a maticí pravděpodobností přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$
   Spočtěte $\mathbf{P}^n$ a rozdělení X_n, je-li $\mathbf{p} = (1, 0)'$.

6. Je dán Markovův řetězec se stavy $\{0, 1, 2\}$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij} = 1/2$ pokud $i \neq j$ a $p_{ii} = 0$ (jedná se o náhodnou procházku na trojúhelníku). Spočtěte matici pravděpodobností přechodu n-tého řádu.

Perronův vzorec. Nechť $A_{K\times K}$ je čtvercová matice, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s násobnostmi $m_1, \ldots, m_k$. Pak
$$A^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m_j-1}}{\mathrm{d}\lambda^{m_j-1}} \left[\frac{\mathrm{adj}(\lambda I - A)}{\psi_j(\lambda)} \lambda^n \right] |_{\lambda=\lambda_j},$$
kde $\psi_j(\lambda) = \dfrac{\det(\lambda I - A)}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}$ a $\mathrm{adj}(B)$ značí matici adjungovanou k matici B, kde $\mathrm{adj}(B) = (c_{ij})_{i=1,j=1}^{K,K}$, kde $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det\{b_{rs},\ r \neq j, s \neq i\}$.

Jsou-li všechna vlastní čísla jednoduchá, pak
$$A^n = \sum_{j=1}^{K} \frac{\mathrm{adj}(\lambda_j I - A)}{\psi_j(\lambda_j)} \lambda_j^n.$$

Pravděpodobnost vymření Galtonova-Watsonova procesu Nechť $\{X_n\}_0^\infty$ je Galtonův-Watsonův proces větvení (viz minulá hodina). Označme jako $e_n = \mathsf{P}(X_n = 0)$ pravděpodobnost, že populace vymře do času n. Pak $\{e_n\}$ je neklesající posloupnost, $e_n \leq 1$ a tedy existuje limita

$$e := \lim_{n\to\infty} e_n = \mathsf{P}(\text{ existuje } n: \ X_n = 0),$$

která vyjadřuje pravděpodobnost, že populace časem vymře. Je-li $X_0 = 1$, pak $P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s))$ a pro $s = 0$ dostaneme $e_n = P_U(e_{n-1})$. Limitním přechodem pak dostaneme rovnost $e = P_U(e)$.
Platí: Nechť $p_0 = P(U_{nj} = 0) \in (0,1)$ a $\mu = \mathsf{E}U_{nj}$.

(a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $e = 1$.
(b) Je-li $\mu > 1$, pak $0 < e < 1$ a e je jediné řešení rovnice $P_U(s) = s$ na intervalu $(0,1)$.

Markovovy řetěze s diskrétním časem. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ s hodnotami ve spočetné množině S se nazývá Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů S, pokud splňuje

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0 \in S$ kdykoliv $\mathsf{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots X_0 = i_0) > 0$.

- Podmíněné pravděpodobnosti $p_{ij}(n, n+1) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ se nazývají **pravděpodobnosti přechodu** ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$. Podobně, $p_{ij}(n, n+m) = \mathsf{P}(X_{n+m} = j | X_n = i)$ pro $m \in \mathbb{N}_0$ se nazývají pravděpodobnosti přechodu m-tého řádu.

- Jestliže $p_{ij}(n, n+m)$ závisí jen na m (a nikoliv na n), pak říkáme, že je tento Markovův řetězec **homogenní** a značíme $p_{ij} = p_{ij}(n, n+1)$. Pro zjištění homogenity Markovova řetězce stačí vyšetřit pouze pravděpodobnosti přechodu prvního řádu.
  Matice $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ se nazývá **matice pravděpodobností přechodu** homogenního Markovova řetězce. Tato matice je tzv. stochastická, tj.

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S, \qquad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S.$$

  Platí

$$\mathsf{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}^{(m)}, \quad i, j \in S, \quad m, n > 0,$$

  je-li $\mathsf{P}(X_n = i) > 0$, kde $p_{ij}^{(m)}$ jsou prvky matice $\mathbf{P}^m$.

- Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{p} = \{p_i, i \in S\}$, kde $p_i = \mathsf{P}(X_0 = i)$ se nazývá **počáteční rozdělení** X. Označíme-li $\mathbf{p}(n) = \{p_j(n), j \in S\}$, kde $p_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j)$ (tzv. absolutní pravděpodobnosti v čase n), pak

$$\mathbf{p}(n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$