Náhodný součet náhodných veličin

1.3.2018

1. Rozhodněte, zda je funkce $P(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$ vytvořující funkcí nějaké čítací náhodné veličiny.

2. Dokažte vlastnosti (i) a (ii).

3. Na zkoušku dorazí N studentů, kde N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Každý student (nezávisle na ostatních) neuspěje u zkoušky s pravděpodobností $p \in (0,1)$. Nechť Z je počet studentů, kteří u zkoušky uspějí.
   (a) Nalezněte vytvořující funkci náhodné veličiny Z. Jaké má Z rozdělení?
   (b) Ověřte na střední hodnotě a rozptylu Z platnost (ii).

4. Uvažujte předchozí příklad s tím, že N má nyní geometrické rozdělení s parametrem $1-\theta$, kde $\theta \in (0,1)$. Jaké má Z nyní rozdělení?

5. V daný den dorazí k bankomatu na okraji města N zákazníků, kde N má geometrické rozdělení s parametrem p. Každý zákazník si chce, nezávisle na ostatních zákaznících, vybrat náhodný počet X_i stokorun, kde X_i má Poissonovo rozdělení s parametrem λ.
   (a) Spočítejte vytvořující funkci celkového počtu stokorun, který bude v daný den vybrán z bankomatu.
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že nebude z bankomatu vybráno nic? Jaká je pravděpodobnost, že bude vybrána právě jedna stokoruna?
   (c) Určete střední hodnotu a rozptyl celkového počtu vybraných stokorun.

6. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení. Nechť $X_0 = 1$ a označme $\mathsf{E}U_{nj} = \mu < \infty$ a $\mathsf{Var}\, U_{nj} = \sigma^2 < \infty$. Dokažte, že pak platí
$$\mathsf{E}X_n = \mu^n, \quad \mathsf{Var}\, X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j.$$

7. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení s $p_0 = P(U_{nj} = 0) = 1/5$, $p_1 = \mathsf{P}(U_{nj} = 1) = 1/5$ a $p_2 = \mathsf{P}(U_{nj} = 2) = 3/5$.
   (a) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n-té generaci.
   (b) Spočtete pravděpodobnost, že populace vymře do času n pro $n = 1, 2$.
   (c) Určete pravděpodobnost, že populace časem vymře.
   (d) Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé populaci.

8. Na stole leží tři mince. Hodíme všemi zároveň a do dalšího kola pokračujeme pouze s mincemi, na nichž padl líc. Pokud žádný líc nepadne, pak hra končí. Mohli bychom takto házet do nekonečna? Jaká je pravděpodobnost, že v $n+1$-ní kole stále ještě máme čím házet?

Teorie

Náhodný součet náhodných veličin. Nechť $\{X_k\}$ je posloupnost iid čítacích náhodných veličin a N je čítací náhodná veličina s nimi nezávislá. Označme $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$.

(i) S_N je čítací náhodná veličina s vytvořující funkcí

$$P_{S_N}(s) = P_N(P_{X_1}(s)).$$

(ii) Pro první dva momenty platí

$$\mathsf{E}S_N = \mathsf{E}N\mathsf{E}X_1, \quad \mathsf{Var}\, S_N = \mathsf{E}N\mathsf{Var}\,(X_1) + \mathsf{Var}\, N(\mathsf{E}X_1)^2.$$

Galtonův-Watsonův proces větvení. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ udává počet jedinců v generacích $n = 0, 1, \ldots$. Předpokládáme, že každý jedinec žije právě jednu generaci a v další generaci má náhodný počet potomků, přičemž počty potomků jednotlivých jedinců jsou na sobě nezávislé a stejně rozdělené a jsou nezávislé na předchozím průběhu procesu.

Předpokládejme, že v nulté generaci je $X_0 = 1$ jedinec. Pak lze počet jedinců v n-té generaci vyjádřit jako

$$X_n = U_{n1} + U_{n2} + \cdots + U_{nX_{n-1}} = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} U_{nj},$$

kde $U_{n1}, U_{n2}, \ldots$ jsou nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako $X_1 = U_{11}$ a nezávislé na $X_0, \ldots, X_{n-1}$. Zjevně tedy pro vytvořující funkce platí

$$\begin{aligned} P_{X_0} &= s, \\ P_{X_1} &= P_U(s), \\ P_{X_n}(s) &= P_{X_{n-1}}(P_U(s)), \quad |s| \leq 1, n = 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost vymření Označme jako $e_n = \mathsf{P}(X_n = 0)$ pravděpodobnost, že populace vymře do času n. Pak $\{e_n\}$ je neklesající posloupnost, $e_n \leq 1$ a tedy existuje limita

$$e := \lim_{n\to\infty} e_n = \mathsf{P}(\text{ existuje } n: \ X_n = 0),$$

která vyjadřuje pravděpodobnost, že populace časem vymře. Je-li $X_0 = 1$, pak $P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s))$ a pro $s = 0$ dostaneme $e_n = P_U(e_{n-1})$. Limitním přechodem pak dostaneme rovnost $e = P_U(e)$.

Platí: Nechť $p_0 = P(U_{nj} = 0) \in (0, 1)$ a $\mu = \mathsf{E}U_{nj}$.
(a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $e = 1$.
(b) Je-li $\mu > 1$, pak $0 < e < 1$ a e je jediné řešení rovnice $P_U(s) = s$ na intervalu $(0, 1)$.