Galtonův-Watsonův proces větvení

3.3. a 5.3.2020

1. Na stole leží tři mince. Hodíme všemi zároveň a do dalšího kola pokračujeme pouze s mincemi, na nichž padl líc. Pokud žádný líc nepadne, pak hra končí.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že po n-tém hodu stále ještě máme čím házet? Mohli bychom takto házet do nekonečna?
   (b) Jak se situace změní, když za každý padlý líc přidáme do hry k mincí, kde $k \in \mathbb{N}$ je předem dané číslo?

2. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení. Nechť $X_0 = 1$ a označme $\mathsf{E}U_{nj} = \mu < \infty$ a $\mathsf{Var}\, U_{nj} = \sigma^2 < \infty$. Dokažte, že pak platí
$$\mathsf{E}X_n = \mu^n, \quad \mathsf{Var}\, X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mu^j.$$

3. Aplikujte vzorce z příkladu 2 na příklad s házením mincemi z 1 (b), když budeme uvažovat pouze jednu startovní minci.

4. Spočtěte pravděpodobnost vymření pro příklad 1 (b).

5. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení s $P(U_{nj} = 0) = 1/5$, $\mathsf{P}(U_{nj} = 1) = 1/5$ a $\mathsf{P}(U_{nj} = 2) = 3/5$.
   (a) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců v n-té generaci.
   (b) Spočtete pravděpodobnost, že populace vymře do času n pro $n = 1, 2$.
   (c) Určete pravděpodobnost, že populace časem vymře.
   (d) Určete rozdělení počtu jedinců ve druhé generaci.

6. (a) Na základě výsledků příkladu 2 ukažte, že je-li $\mu < 1$, pak $X_n \xrightarrow{P} 0$ a odtud nutně $e = 1$.
   (b) Označme jako T čas do vymření populace, tj. $T = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$. Pak pro $\mu > 1$ je toto příklad náhodné veličiny, která s kladnou pravděpodobností nabývá hodnoty ∞.
   (c) Jaké je rozdělení T v příkladě 1(a)?

7. Nechť $\{X_n\}$ je Galtonův-Watsonův proces větvení a označme jako q pravděpodobnost, že proces časem vymře.
   (a) Nechť mají počty potomků Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 1$. Ukažte, že pak $q < 1/\lambda$.
   (b) Nechť mají počty potomků binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(N, m/N)$ pro $N, m \in \mathbb{N}$, $N > m > 1$. Ukažte, že pak $q < 1/m$.

Galtonův-Watsonův proces větvení. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ udává počet jedinců populace identických organismů v generacích $n = 0, 1, \dots$. Předpokládáme, že každý jedinec žije právě jednu generaci a při svém zániku dá vzniknout náhodnému počtu potomků, přičemž počty potomků jednotlivých jedinců jsou na sobě nezávislé a stejně rozdělené a jsou nezávislé i na předchozím průběhu procesu.

Předpokládejme, že v nulté generaci je právě jeden jedinec, tj. $X_0 = 1$. Pak lze počet jedinců v n-té generaci X_n vyjádřit jako

$$X_n = U_{n1} + U_{n2} + \cdots + U_{nX_{n-1}} = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} U_{nj},$$

kde $U_{n1}, U_{n2}, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako $X_1 = U_{11}$ a nezávislé na $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$. Zjevně tedy pro vytvořující funkce platí

$$\begin{aligned}
&P_{X_0}(s) = s,\\
&P_{X_1}(s) = P_U(s),\\
&P_{X_n}(s) = P_{X_{n-1}}(P_U(s)), \quad |s| \le 1, n = 2, 3, \dots.
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost vymření Označme jako $e_n = \mathsf{P}(X_n = 0)$ pravděpodobnost, že populace vymře do času n. Pak $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesající ($[X_n = 0] \subseteq [X_{n+1} = 0]$), omezená ($0 \le e_n \le 1$) posloupnost a tedy existuje limita

$$e := \lim_{n\to\infty} e_n = \mathsf{P}(\text{ existuje } n: \ X_n = 0),$$

která vyjadřuje pravděpodobnost, že populace časem vymře. Je-li $X_0 = 1$, pak

$$P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s)), \quad |s| \le 1$$

a volbou $s = 0$ dostaneme $e_n = P_U(e_{n-1})$. Limitním přechodem pak dostaneme rovnost $e = P_U(e)$.

Platí: Nechť $p_0 = P(U_{nj} = 0) \in (0, 1)$ a $\mu = \mathsf{E}U_{nj}$.
(a) Je-li $\mu \le 1$, pak $e = 1$.
(b) Je-li $\mu > 1$, pak $0 < e < 1$ a e je jediné řešení rovnice $P_U(s) = s$ na intervalu $(0, 1)$.