Markovovy řetězce se spojitým časem

29.4.2019

1. Na stavbě pracuje N svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase t neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t+h]$ proud odebírat s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$. Svářeč, který v čase t proud odebíral, ukončí odběr v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Nechť X_t značí počet svářečů, kteří v čase t odebírají proud.

   (a) Najděte matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.

   (b) Předpokládejme, že v čase 0 neodebírá proud žádný svářeč.
      - Jaké je rozdělení a střední hodnota doby čekání na odběr prvního svářeče?
      - Jaké je rozdělení doby čekání na začátek odběru jednoho konkrétního svářeče?
      - Jaký je vztah mezi zmíněnými dvěma náhodnými veličinami?

   Uvažujme dále speciální případ $N = 1$.

   (c) Určete absolutní pravděpodobnosti v čase t, jestliže na začátku v čase 0 svářeč proud neodebíral s pravděpodobností 1.

   (d) Uvažujte vnořený řetězec $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Napište jeho matici pravděpodobností přechodu. Klasifikujte jeho stavy.

   (e) Spočítejte stacionární rozdělení $\{X_t, t \geq 0\}$ i stacionární rozdělení $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

   (f) Ověřte, že platí vztah uvedený v 5.

2. V obchodě pracují tři prodavačky. Pokud prodavačka právě někoho obsluhuje, pak pravděpodobnost, že zákazníka doobslouží v časovém intervalu $(t, t+h]$ a nikoho obsluhovat nebude, je $3h + o(h)$. V intervalu $(t, t+h]$ přijde jeden zákazník s pravděpodobností $2h + o(h)$, dva nebo více s pravděpodobností $o(h)$ a žádný s pravděpodobností $1 - 2h + o(h)$. Předpokládejme, že zákazníci přicházejí zaměstnávat jednotlivé prodavačky nezávisle a rovněž ony se chovají nezávisle na svých kolegyních. Pokud všechny prodavačky obsluhují, odchází nově příchozí zákazník neobsloužen. Nechť X_t značí počet obsluhujících prodavaček v čase t.

   (a) Nalezněte matici intenzit řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.

   (b) Zapište matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce. Klasifikujte jeho stavy.

   (c) Spočtěte stacionární rozdělení, tj. rozdělení v ustáleném režimu.

   (d) Spočtěte i střední počet obsluhujících prodavaček v ustáleném režimu

   Jiná formulace zadání: Uvažujme obchod se třemi prodavačkami. Zákazníci přicházejí do obchodu dle Poissonova procesu s intenzitou λ. Doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou μ. Jsou-li všechny prodavačky zaneprázdněné, zákazník odchází neobsloužen (netvoří se fronta). Nechť X_t značí počet obsluhujících prodavaček v čase t.

3. Pro příklad se svářeči pro obecné N:

   (a) Napište jeho matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a spočtěte jeho stacionární rozdělení.

   (b) Spočítejte stacionární rozdělení $\{X_t, t \geq 0\}$.

4. Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase $t = 0$ je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že je-li zdravý jedinec v kontaktu s nemocným v čase t, pak ten zdravý onemocní v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $1/2h+o(h)$. Jedinec nemocný v čase t se naopak v intervalu $(t, t+h]$ uzdraví s pravděpodobností $1/3h + o(h)$. Uzdravování a onemocnení jednotlivých jedinců probíhá nezávisle, nemoc je možné dostat opakovaně, má nulovou inkubační dobu a zdravý jedinec nemůže nikoho nakazit. Nechť X_t je počet nemocných kamarádů na chatě v čase t.
   (a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$.
   (b) Určete matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce. Klasifikujte jeho stavy.

5. Nechť $\boldsymbol{\pi}^*$ je stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Ukažte, že pak $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\pi}^*$ je invariantní míra $\{X_t, t \geq 0\}$, kde $\mathbf{V} = \mathrm{diag}\{q_i\}_{i\in S}$.
   Naopak, nechť $\boldsymbol{\eta}$ je invariantní míra $\{X_t, t \geq 0\}$. Pak pro $\boldsymbol{\eta}^* = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}$ platí $\boldsymbol{\eta}^{*T}\mathbf{Q}^* = \boldsymbol{\eta}^{*T}$.

Příklad. Uvažujme spojitý HMŘ s maticí intenzit $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

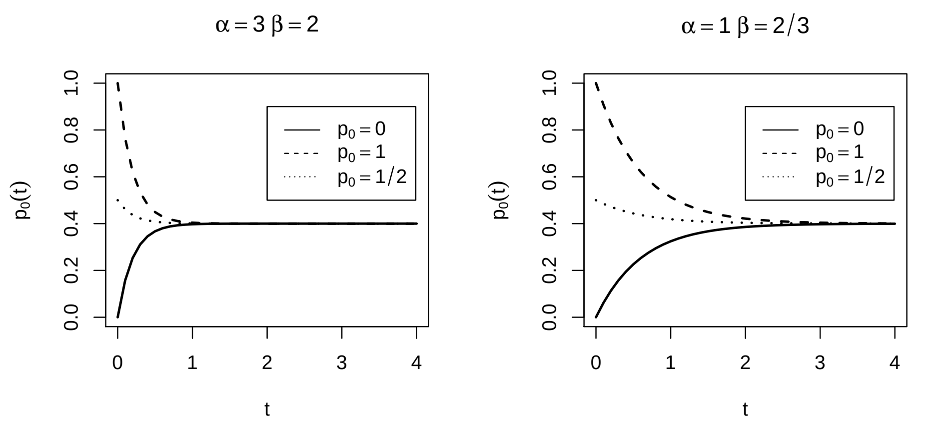
kde $\alpha, \beta > 0$. Minule jste spočetli, že

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-t(\alpha+\beta)} & \alpha - \alpha e^{-t(\alpha+\beta)} \\ \beta - \beta e^{-t(\alpha+\beta)} & \alpha + \beta e^{-t(\alpha+\beta)} \end{pmatrix}.$$

Je-li $p(0) = (p_0, p_1)^T$ počáteční rozdělení, pak pro absolutní pravděpodobnost v čase t platí $p(t)^T = p(0)^T\mathbf{P}(t)$. Je-li $p(t) = (p_0(t), p_1(t))^T$, pak

$$p_0(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}(p_0\alpha - p_1\beta), \quad p_1(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{e^{-t(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}(-p_0\alpha + p_1\beta).$$

Pro $t \to \infty$ máme $p(t) \to \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta, \alpha)^T$, což je limitní (stacionární) rozdělení daného řetězce, které lze spočíst i řešením $\boldsymbol{\pi}^T\mathbf{Q} = 0$. Nezávisle na počátečním rozdělení $p(0)$ se po nějakém čase t řetězec „ustálí“ na tomto stacionárním rozdělení. Proto také někdy hovoříme o tzv. **ustáleném režimu.**



Markovův řetězec se spojitým časem. Systém celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$ se nazývá **Markovův řetězec se spojitým časem** a spočetnou množinou stavů S, jestliže

$$\mathsf{P}(X_t = j | X_s = i, X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1) = \mathsf{P}(X_t = j | X_s = i)$$

pro všechna $i, j, i_1, \ldots, i_n \in S$ a všechna $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < s < t$, pro která je pravděpodobnost podmínky nenulová.

- Budeme pracovat pouze s **homogenními** řetězci, tj. s řetězci, pro které platí $\mathsf{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) = p_{ij}(t)$ pro všechna $s \geq 0$ a $t > 0$. Pracujeme pak se systémem matic pravděpodobností přechodu $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$, kde $\mathbf{P}(0) = I$.
- $p_i(t) = \mathsf{P}(X_t = i)$ jsou absolutní pravděpodobnosti, $p_i = \mathsf{P}(X_0 = i)$ jsou počáteční pravděpodobnosti. Platí $\mathbf{p}(t)^T = \mathbf{p}(0)^T \mathbf{P}(t)$.

Matice intenzit. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij}(t) = \mathsf{P}(X_{s+t} = j | X_s = i)$, $s \geq 0$, $t > 0$, $i, j \in S$, které splňují $\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$ pro všechna $i, j \in S$ (tj. p_{ij} jsou zprava spojité v 0). Pak pro všechny stavy $i, j \in S$, $i \neq j$ existují limity

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = q_i = -q_{ii} \leq \infty, \quad \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij} < \infty. \tag{1}$$

Čísla q_{ij} se nazývají **intenzity přechodu** ze stavu i do stavu j, q_i je **celková intenzita** a $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ se nazývá **matice intenzit přechodu**.

- Je-li S konečná, pak nutně $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ pro všechna i. Pro nekonečné řetězce tuto rovnost musíme předpokládat.
- Je-li $q_i = 0$, pak $p_{ii}(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$.
- Je-li $0 < q_i < \infty$, pak má doba, po kterou řetězec setrvá ve stavu i, **exponenciální rozdělení** se střední hodnotou $1/q_i$. Pravděpodobnost, že ze stavu i přejde řetězec nejdříve do stavu j je q_{ij}/q_i pro $i \neq j$.

Značení. Výraz $f(h) = o(h)$ značí, že $f(h)/h \to 0$ pro $h \to 0+$.

Kolmogorovovy diferenciální rovnice Nechť $q_i < \infty$ a $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$pro všechna $i \in S$. Potom platí tzv. retrospektivní rovnice

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).$$

Je-li S konečná nebo je-li konvergence $p_{ij}(h)/h \to q_{ij}$ stejnoměrná v i, pak platí i prospektivní rovnice

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)Q.$$

- Nechť je dána konečná matice $\mathbf{Q}_{N \times N}$ splňující $q_{ij} \geq 0$ pro $i \neq j$ a $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ pro všechna i. Pak existuje jediné řešení Kolmogorovových dif. rovnic, stejné pro obě soustavy, které vyhovuje počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = I$ a které představuje systém pravděpodobností přechodu Markovova řetězce s maticí intenzit $\mathbf{Q}$. Platí

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!}.$$

VNOŘENÝ ŘETĚZEC. Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticí intenzit $\mathbf{Q}$. Nechť $J_1, J_2, \ldots$ jsou po sobě jdoucí časové okamžiky, ve kterých dochází k přechodům mezi stavy tohoto řetězce. Definujme

$$Y_0 = X_0,$$
$$Y_n = X_{J_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pak $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ se nazývá **vnořený řetězec** a je to homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{Q}^* = (Q^*_{ij})_{i,j \in S}$, kde

$$q^*_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0, \\ 0, & q_i = 0 \end{cases} \quad \text{pro } j \neq i, \qquad \text{a} \quad q^*_{ii} = \begin{cases} 0 & q_i > 0, \\ 1, & q_i = 0. \end{cases}$$

Doby mezi jednotlivými přechody jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením.

STACIONÁRNÍ ROZDĚLENÍ Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ je homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a maticemi pravděpodobností přechodů $\{\mathbf{P}(t), t \geq 0\}$.

- Vektor $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i, i \in S\}$ se nazývá **invariantní míra** $\{X_t\}$ na S vzhledem k $\{P(t)\}$, pokud

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}(t) = \boldsymbol{\eta}^T, t \geq 0.$$

- Pravděpodobnostní rozdělení $\boldsymbol{\pi}$ na S, které je invariantní míra $\{X_t\}$, se nazývá **stacionární rozdělení** $\{X_t\}$.
- Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{a} = \{a_i, i \in S\}$ se nazývá **limitní rozdělení**, pokud $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = a_j$ pro všechna $i, j \in S$. Pokud existuje limitní rozdělení řetězce, je to stacionární rozdělení.
- Nechť je vnořený řetězec nerozložitelný a všechny jeho stavy jsou trvalé. Pak existuje invariantní míra $\{X_t\}$, která je určena jednoznačně (až na multiplikativní konstantu) jako řešení rovnice

$$\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$$

  a $0 < \eta_j < \infty$ pro všechna $j \in S$.
  Je-li $\sum_{j \in S} \eta_j < \infty$, pak $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}_{j \in S}$, kde

$$\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_{k \in S} \eta_k},$$

  je **stacionární rozdělení** $\{X_t\}$ a platí

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \text{ pro všechna } i, j \in S, \quad \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j, \text{ pro všechna } j \in S.$$