Pravděpodobnost absorpce

25.3.2019

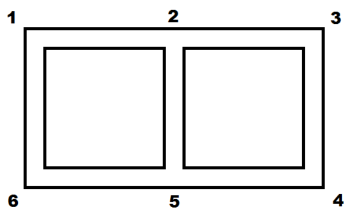
1. Leze slimák po nekonečně vysokém stromě. Za každou hodinu vyleze nahoru o jeden centimetr s pravděpodobností p a se zbylou pravděpodobností $1-p$ sklouzne dolů o jeden centimetr, je-li nad základní úrovní (jinak namísto sklouznutí zůstává na svém místě). Označme X_n výšku v cm, ve které se slimák nachází po n hodinách.
   (a) Uvažujte $p = 1/4$. Spočtěte stacionární rozdělení (existuje-li).
   (b) Proveďte totéž pro $p = 3/4$ a $p = 1/2$.

2. Uvažujme Markovův řetězec se stavy $\{1, 2, 3, 4\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{20} & \frac{7}{20} & \frac{12}{20} \end{pmatrix}$$

   Spočtěte pravděpodobnosti absorpce do stavů 1 a 2.

3. Mravenec běhá v níže uvedeném bludišti. V každém kroku si vybere jeden ze čtyř možných směrů, každý se stejnou pravděpodobností, tímto směrem se vydá a běží tak dlouho, jak jen to jde. Pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě. Označíme jako X_n polohu mravence v čase n (tj. po n rozhodovacích krocích).



   (a) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ a klasifikujte stavy.
   (b) Určete pravděpodobnosti absorpci a interpretujte je.
   (c) Spočtěte stacionární rozdělení.

4. Cyril a Dana hrají opakovaně hru, ve které Cyril vyhrává s pravděpodobností p a Dana s pravděpodobností $1-p$ (nezávisle na předchozím vývoji hry). Když vyhraje Cyril, dostane od Dany 100 Kč, a když vyhraje Dana, dostane od Cyrila 100 Kč. Na začátku hry má Cyril a stokorun a Dana $k-a$ stokorun. Hraje se tak dlouho, dokud jeden z hráčů neztratí celý svůj kapitál.
   – S jakou pravděpodobností skončí hra zruinováním Cyrila?
   – S jakou pravděpodobností skončí hra zruinováním (resp. výhrou) Cyrila, jestliže $p = 1/2$?

NEKONEČNÉ NEROZLOŽITELNÉ ŘETĚZCE. Nechť $\{X_n\}$ je **nerozložitelný** homogenní MŘ se stavy $S = \mathbb{N}_0$ s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Potom

– Všechny stavy jsou **trvalé nenulové** právě tehdy, když existuje stacionární rozdělení $\pi^T\mathbf{P} = \pi^T$, $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$.
  V tomto případě pak

$$\pi_j \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I[X_k = j] \overset{s.j.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k = j) = \frac{1}{\mathsf{E}_j\tau_j(1)}.$$

  Je-li řetězec navíc aperiodický, pak existují i limity $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_j(X_n = j) = \pi_j$.
– Jestliže stacionární rozdělení neexistuje, pak jsou všechny stavy buď přechodné nebo trvalé nulové. Na rozlišení těchto dvou případů existuje kritérium, které budeme procvičovat na příští hodině.

PRAVDĚPODOBNOSTI ABSORPCE. Nechť $\{X_n\}_0^\infty$ je homogenní MŘ s konečně mnoha stavy a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$. Označme jako T množinu všech přechodných stavů a C množinu všech trvalých stavů. Pak je možné $\mathbf{P}$ přeuspořádat do tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}^* = \{p_{ij}, i, j \in C\}$, $\mathbf{Q} = \{p_{ij}, i \in T, j \in C\}$, $\mathbf{R} = \{p_{ij}, i, j \in \mathrm{T}\}$.

– Označme jako $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\}$ čas výstupu z množiny přechodných stavů T. Pravděpodobnost absorpce značíme $u_{ij} = \mathsf{P}_i(X_\tau = j)$, $i \in T$, $j \in C$ a udává nám, s jakou pravděpodobností řetězec startující ze stavu $i \in T$ ze všech trvalých stavů poprvé vstoupí právě do stavu $j \in C$.
– Platí

$$u_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\in T} p_{ik}u_{kj},$$

  a proto matici absorpce $\mathbf{U} = \{u_{ij}, i \in T, j \in C\}$ lze získat ze vzorce

$$\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{R}^n\mathbf{Q}.$$

  Matice $\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$ se nazývá fundamentální matice řetězce $\{X_n\}$.

INVERZE MATICE 2×2 Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pak

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Pro obecnou matici $\mathbf{A}_{n\times n}$ pak $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ nebo lze $\mathbf{A}^{-1}$ spočíst pomocí Gaussovy eliminační metody.