Markovovy řetězce s diskrétním časem

4.3.2019

1. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na $\{-1, 0, 1\}$. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti Markovovy řetězce, a případně zapište matici pravděpodobností přechodu:
   (a) $\{S_n\}_1^\infty$, kde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,
   (b) $\{Y_n\}_0^\infty$, kde $Y_n = \max\{X_0, \dots, X_n\}$,
   (c) $\{Z_n\}_0^\infty$, kde $Z_n = X_n + X_{n-1}$,
   Nápověda: Uvažujte trajektorie $(-2; 0; 2)$ *a* $(2; 0; 2)$ *pro* $(Z_0; Z_1; Z_2)$.
   (d) $\{(Z_n, U_n)^\top\}_0^\infty$, kde $U_n = X_n - X_{n+1}$.

2. Uvažujte Galtonův-Watsonův proces větvení z minulé hodiny s $p_0 = P(U_{nj} = 0) = 1/5$, $p_1 = \mathsf{P}(U_{nj} = 1) = 1/5$ a $p_2 = \mathsf{P}(U_{nj} = 2) = 3/5$ a $X_0 = 1$. Ukažte, že se jedná o homogenní Markovův řetězec. Napište pravděpodobnosti přechodu ze stavů $0, 1, 2$.

3. Pro 1 (b) napište matici pravděpodobností přechodů všech řádů.

4. Uvažujte Markovův řetězec $\{X_n\}_0^\infty$ s $S = \{0, 1\}$ a maticí pravděpodobností přechodu
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$
Spočtěte $\mathbf{P}^n$. Určete rozdělení X_n, pro případ $\mathsf{P}(X_0 = 0) = 1$ i pro případ $\mathsf{P}(X_0 = 1) = 1$.

5. Uvažujte náhodnou procházku na trojúhelníku, tj. Markovův řetězec $\{X_n\}$ se stavy $\{0, 1, 2\}$ a s pravděpodobnostmi přechodu $p_{ij} = 1/2$ pokud $i \neq j$ a $p_{ii} = 0$. Spočtěte matici pravděpodobností přechodu n-tého řádu.

6. Spočtěte 3. s využitím Perronova vzorce.

Markovovy řetěze s diskrétním časem. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ s hodnotami ve spočetné množině S se nazývá Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů S, pokud splňuje

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0 \in S$ kdykoliv $\mathsf{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots X_0 = i_0) > 0$.

- Podmíněné pravděpodobnosti $p_{ij}(n, n+1) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ se nazývají **pravděpodobnosti přechodu** ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$. Podobně, $p_{ij}(n, n+m) = \mathsf{P}(X_{n+m} = j | X_n = i)$ pro $m \in \mathbb{N}_0$ se nazývají pravděpodobnosti přechodu m-tého řádu.

- Jestliže $p_{ij}(n, n+m)$ závisí jen na m (a nikoliv na n), pak říkáme, že je tento Markovův řetězec **homogenní** a značíme $p_{ij} = p_{ij}(n, n+1)$. Pro zjištění homogenity Markovova řetězce stačí vyšetřit pouze pravděpodobnosti přechodu prvního řádu.
  Matice $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ se nazývá **matice pravděpodobností přechodu** homogenního Markovova řetězce. Tato matice je tzv. stochastická, tj.

  $$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S, \qquad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S.$$

  Platí
  $$\mathsf{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}^{(m)}, \quad i, j \in S, \quad m, n > 0,$$
  je-li $\mathsf{P}(X_n = i) > 0$, kde $p_{ij}^{(m)}$ jsou prvky matice $\mathbf{P}^m$.

- Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{p} = \{p_i, i \in S\}$, kde $p_i = \mathsf{P}(X_0 = i)$ se nazývá **počáteční rozdělení** X. Označíme-li $\mathbf{p}(n) = \{p_j(n), j \in S\}$, kde $p_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j)$ (tzv. absolutní pravděpodobnosti v čase n), pak

  $$\mathbf{p}(n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Perronův vzorec. Nechť $A_{K \times K}$ je čtvercová matice, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s násobnostmi $m_1, \ldots, m_k$. Pak
$$A^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(m_j - 1)!} \frac{\mathrm{d}^{m_j - 1}}{\mathrm{d}\lambda^{m_j - 1}} \left[\frac{\mathrm{adj}(\lambda I - A)}{\psi_j(\lambda)} \lambda^n \right] |_{\lambda = \lambda_j},$$

kde $\psi_j(\lambda) = \dfrac{\det(\lambda I - A)}{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}$ a $\mathrm{adj}(B)$ značí matici adjungovanou k matici B, tj. $\mathrm{adj}(B) = (c_{ij})_{i=1,j=1}^{K,K}$, kde $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ kde $M_{i,j}$ vznikne z matice B vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Jsou-li všechna vlastní čísla jednoduchá (tj. $k = K$), pak
$$A^n = \sum_{j=1}^{K} \frac{\mathrm{adj}(\lambda_j I - A)}{\psi_j(\lambda_j)} \lambda_j^n.$$