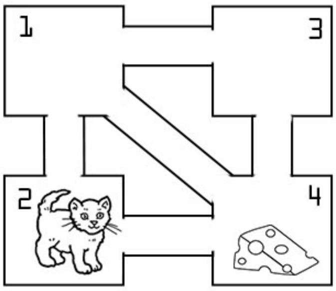
Ukázková zápočtová písemka

Příklad 1. (2+4 = 6 bodů) Myš se pohybuje v následujícím bludišti, které je tvořeno pokoji 1 až 4 a chodbami, které tyto pokoje spojují. V pokoji 2 na myš číhá kočka, takže když jej myš navštíví, tak je sežrána a už tento pokoj neopustí. Podobně, v pokoji 4 je umístěn sýr, který když myš najde, již jej neopustí. Ve zbylých pokojích se myš každou minutu rozhodne a buď s pravděpodobností 1/4 zůstane v daném pokoji nebo si náhodně vybere jednu z chodeb (všechny se stejnou pravděpodobností), které z daného pokoje vedou, a tou přejde do sousedního pokoje. Označme jako X_n náhodnou veličinu udávající číslo pokoje, ve kterém se myš nachází v čase n.



(a) Napište matici pravděpodobností přechodu řetězce $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ a klasifikujte jeho stavy. Vše řádně zdůvodněte.

(b) Spočtěte, s jakou pravděpodobností skončí myš u sýru, pokud startuje z pokoje j pro $j = 1, 3$.

Příklad 2. (1+7 = 8 bodů) Šnek leze na nekonečný strom. Je-li ve výšce n, vyleze v následující hodině o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností $1/3^{n+1}$. Naopak, s pravděpodobností $2/3^{n+1}$ nevydrží nápor gravitace a sklouzne dolů na zem. Se zbylou pravděpodobností šnek odpočívá a v následující hodině se nepohne z místa. Označme jako X_n výšku (v centimentech), ve které se šnek nachází po n hodinách.

(a) Uvědomte si, $\{X_n\}$ tvoří Markovův řetězec a napište jeho matici pravděpodobností přechodu.

(b) Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 3. (1 + 3 = 4 body) Uvažujte Markovův řetězec $\{X_n\}$ se stavy $\{1, 2, 3\}$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte stavy tohoto řetězce a spočtěte stacionární rozdělení.

Příklad 4. (2 body) V sáčku je N semínek, kde N je náhodná veličina s diskrétním rovnoměrným rozdělením na množině $\{4, 5, 6\}$. Každé semínko úspěšně vyklíčí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává počet vyklíčených rostlinek. Spočtěte vytvořující funkci a střední hodnotu X.