Momentová metoda, Intervalové odhady
2.11.2017

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Odhadněte neznámý parametr λ momentovou metodou. Je tento odhad nestranný a konzistentní? Jaké je jeho asymptotické rozdělení?
   (b) Na základě odhadu z části (a) najděte klasický asymptotický intervalový odhad λ.
   (c) Podobně odvoďte, jak vypadá spolehlivostní množina B_n.
   (d) Zkonstruujte také interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl.
   (e) Napište také oba jednostranné (klasické asymptotické) intervalové odhady pro λ.

2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x;\theta) = \theta^{-1}\mathrm{I}[0 < x < \theta]$, pro $\theta > 0$. Proveďte (a)–(d) stejně jako v bodě 1.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x;p) = px^{-p-1}\mathrm{I}[x > 1]$, pro $p > 0$. Najděte odhad p momentovou metodou a odvoďte klasický asymptotický intervalový odhad.

4. Nechť f_1 a f_2 jsou hustoty rozdělení náhodných veličin W_1 a W_2, pro které platí $\mathsf{E}\, W_i = \mu_i$, $\mathsf{Var}\, W_i = \sigma_i^2$, pro $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$ známé, $i = 1, 2$. Uvažujte směs těchto hustot
$$f(x;\theta) = \theta f_1(x) + (1-\theta) f_2(x)$$
   pro $\theta \in (0,1)$ neznámé. Máme k dispozici náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ pozorování z rozdělení daného hustotou f.
   (a) Najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ pomocí metody momentů. Vyšetřete jeho nestrannost (případně vychýlení) a konzistenci.
   (b) Spočtěte střední kvadratickou chybu $\widehat{\theta}_n$.
   (c) Najděte asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a z něj odvoďte intervalový odhad parametru θ.

5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Uvažujte $U_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$ odhad parametru θ. Sestrojte přesný (nikoliv asymptotický) intervalový odhad θ založený na U_n/θ.

6. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr s hustotou $f(x;b) = xb^{-2}\exp(-x^2/2b^2)\mathrm{I}[x \ge 0]$ pro $b > 0$.
   (a) Nalezněte odhad $\hat{b}_n$ parametru b momentovou metodou.
   (b) Nalezněte asymptotické rozdělení $\hat{b}_n$ a na jeho základě sestrojte klasický asymptotický intervalový odhad b.

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

MOMENTOVÁ METODA Nechť $X = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodný výběr z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$.

– Nechť $\theta_X = t(F_X) \in \mathbb{R}$ je nějaký parametr tohoto rozdělení a nechť $\mathsf{E}X_1 = g(\theta)$ pro nějakou ryze monotónní funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Momentový odhad $\widehat{\theta}_n$ se získá jako řešení $\overline{X}_n = g(\widehat{\theta}_n)$, neboli

$$\widehat{\theta}_n = g^{-1}\left(\overline{X}_n\right).$$

– Nechť $\boldsymbol{\theta}_X = t(F_X) \in \mathbb{R}^2$ je vektor parametrů rozdělení a nechť $\begin{pmatrix} \mathsf{E}X_1 \\ \mathsf{Var}\, X_1 \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ pro nějakou prostou funkci $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vektor řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} \overline{X}_n \\ S_n^2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$$

se nazývá momentovým odhadem vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$.

KONSTRUKCE INTERVALOVÝCH ODHADŮ Chceme zkonstruovat intervalový odhad pro parametr θ, přičemž máme odhad $\widehat{\theta}_n$ tohoto parametru, pro který platí

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta_X\big) \xrightarrow{D} \mathsf{N}\big(0, \sigma^2(\theta_X)\big),$$

kde $\sigma^2(\cdot)$ je funkce spojitá ve skutečné hodnotě parametru θ_X.

– **Klasický asymptotický interval spolehlivosti** vychází z asymptotického rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a z Cramérovy-Sluckého věty. Jelikož $\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} \xrightarrow{D} \mathsf{N}\big(0, 1\big)$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(-u_{1-\alpha/2} \le \tfrac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} \le u_{1-\alpha/2}\Big) = 1 - \alpha,$$

a tedy

$$\Big(\widehat{\theta}_n - \tfrac{u_{1-\alpha/2}\,\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}, \widehat{\theta}_n + \tfrac{u_{1-\alpha/2}\,\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}\Big) \tag{1}$$

je intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.

– Jiný možný postup využívá přímo, že pro množinu

$$B_n = \Big\{\theta : \Big|\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)}\Big| \le u_{1-\alpha/2}\Big\} \tag{2}$$

platí, že $\mathsf{P}\big(B_n \ni \theta_X\big) = 1 - \alpha$. Zpravidla je B_n interval, ale obecně může být zadán jen implicitně.

– **Interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl**. Nechť g je taková, že $[g'(\theta)]^2\,\sigma^2(\theta) = 1$, pak z Δ-metody dostáváme, že $\sqrt{n}\left(g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{D} \mathsf{N}\big(0, 1\big)$ a tedy

$$\Big(g(\widehat{\theta}_n) - \tfrac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, g(\widehat{\theta}_n) + \tfrac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\Big)$$

je intervalový odhad pro $g(\theta)$. Z něj pak invertováním obou mezí získáme intervalový odhad parametru θ o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.