Vlastnosti odhadů

26.10.2017

1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \mathrm{e}^{-ax} I[x \geq 0]$, pro $a > 0$ a $p > 0$. Uvažujte odhady

$$\widehat{a}_n = \frac{\overline{X}_n}{S_n^2}, \quad \widehat{p}_n = \frac{\overline{X}_n^2}{S_n^2}.$$

   (a) Ukažte, že $\widehat{a}_n$ a $\widehat{p}_n$ jsou konzistentní odhady parametrů a a p.
   (b) Odvoďte sdružené asymptotické rozdělení vektoru $(\widehat{a}_n, \widehat{p}_n)^{\mathsf{T}}$.
   (c) Zamyslete se nad nestranností těchto odhadů. Co bychom museli znát, abychom byli schopni rozhodnout, zda jsou odhady nestranné?

   Využijte toho, že pro gama rozdělení platí $\mathsf{E}X_1 = \frac{p}{a}$, $\mathsf{Var}\,(X_1) = \frac{p}{a^2}$, $\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{p}}$ a $\gamma_4 = \frac{6}{p} + 3$.

2. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Uvažujte $U_n = \overline{X}_n$ a $T_n = S_n^2$ dva různé odhady λ. Vyšetřete jejich nestrannost a konzistenci.
   (b) Uvažujte odhad $V_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$. Vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.
   (c) Uvažujte odhad $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.
   (d) Který z odhadů U_n, T_n, V_n, W_n byste spíše doporučili a proč?
   Můžete využít toho, že špičatost γ_4 Poissonova rozdělení je $\frac{1}{\lambda} + 3$.
   (e) Pro $n = 1$ najděte nestranný odhad parametru $\theta_X = \mathrm{e}^{-2\lambda}$. Zamyslete se nad jeho užitečností.

3. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem $p \in (0, 1)$.
   (a) Rozhodněte, zda je $\overline{X}_n(1 - \overline{X}_n)$ nestranný a konzistentní odhad rozptylu $p(1-p)$. Pokud není, spočtěte jeho vychýlení.
   (b) Ukažte, že neexistuje nestranný odhad parametru $\theta_X = \frac{1}{p}$.

4. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Uvažujte odhady $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ a $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$.
   (a) Spočtěte střední čtvercovou chybu S_n^2.
   (b) Spočtěte střední čtvercovou chybu σ_n^2 a porovnejte s (a).
   (c) Rozhodněte, zda $S_n = \sqrt{S_n^2}$ je konzistentní a nestranný odhad parametru $\theta_X = \sigma$. Pokud není nestranný, spočítejte jeho vychýlení.

5. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(0, \theta)$, kde $\theta > 0$.
   (a) Rozhodněte, zda $\widetilde{\theta}_n = 2\,\overline{X}_n$ je nestranný a konzistentní odhad parametru θ. Pokud není, spočtěte jeho vychýlení.
   (b) Spočtěte střední čtvercovou chybu odhadu $\widetilde{\theta}_n$.
   (c) Rozhodněte, zda $\widehat{\theta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ je nestranný a konzistentní odhad parametru θ. Pokud není, spočtěte jeho vychýlení.
   (d) Spočtěte střední čtvercovou chybu odhadu $\widehat{\theta}_n$.
   (e) Kterému z odhadů $\widehat{\theta}_n$, $\widetilde{\theta}_n$ byste dali přednost?

Opakování z přednášky

Nechť $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výběr z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$, kde $\theta_X = t(F_X)$ je nějaký parametr tohoto rozdělení. Nechť $\widehat{\theta}_n = T_n(\mathbf{X})$ je odhad θ_X. Pak $\widehat{\theta}_n$ může mít následující **vlastnosti**:

- $\widehat{\theta}_n$ je nestranný, pokud $\mathsf{E}\widehat{\theta}_n = \theta_X$,
- $\widehat{\theta}_n$ je konzistentní, pokud $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_X$ pro $n \to \infty$.

Číselně nás může zajímat

- vychýlení $\mathsf{E}(\widehat{\theta}_n - \theta_X)$,
- střední čtvercová chyba

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_n) = E(\widehat{\theta}_n - \theta_X)^2 = \mathsf{Var}\,\widehat{\theta}_n + \Big(\mathsf{E}(\widehat{\theta}_n - \theta_X)\Big)^2,$$

- asymptotický rozptyl, tj. σ^2 takové, že platí $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro $n \to \infty$.