Asymptotické rozdělení
19.10.2017

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I[x \geq 0]$.
   (a) Ukažte, že $T_n = 1/\overline{X}_n$ je maximálně věrohodný odhad λ.
   (b) Ukažte, že $T_n \xrightarrow{P} \lambda$ pro $n \to \infty$, tj. T_n je konzistentní odhad λ.
   (c) Najděte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$.

2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x) = \frac{p}{x^{1+p}} I[x \geq 1]$, kde $p > 0$.
   (a) Najděte T_n maximálně věrohodný odhad parametru p.
   (b) Ukažte, že pro $n \to \infty$ platí $T_n \xrightarrow{P} p$.
   (c) Najděte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $\sqrt{n}\,(T_n - p)$.
   (d) Uvažujte odhad $U_n = \overline{X}_n/(\overline{X}_n - 1)$. Vyšetřete asymptotické chování odhadu U_n (konvergenci v pravděpodobnosti).
   (e) Odvoďte asymptotické rozdělení U_n.
   (f) Pro $p = 3$ odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $Z_n = (\overline{X}_n)^3$. Porovnejte rozptyl Z_n s jejím asymptotickým rozptylem.

3. (Věta 2.6 (iv)). Nechť $X_1, \ldots, X_n$ tvoří náhodný výběr z rozdělení s konečným čtvrtým momentem ($\mathsf{E}X_1^4 < \infty$). Ukažte, že pro $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\overline{X}_n \\ S_n^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathsf{E}X \\ \mathsf{Var}\, X\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{D} N_2\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}\right),$$

   kde $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma^3\gamma_3 \\ \sigma^3\gamma_3 & \sigma^4(\gamma_4 - 1)\end{pmatrix}$ a $\gamma_j = \mathsf{E}(X_1 - \mu)^j/\sigma^j$ pre $j = 3, 4$.

4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělní s hustotou $f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} I[x \geq 0]$, pre $a > 0$ a $p > 0$. Uvažujte odhady

$$\widehat{a}_n = \frac{\overline{X}_n}{S_n^2}, \quad \widehat{p}_n = \frac{\overline{X}_n^2}{S_n^2}.$$

   Dokážte konzistenci těchto odhadů, a odvoďte sdružené asymptotické rozdělení vektoru $(\widehat{a}_n, \widehat{p}_n)^\mathsf{T}$.

5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_x > 0$, a nechť $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou od nich nezávislé, a tvoří náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda_y > 0$. Odvoďte asymptotické rozdělení náhodné veličiny $T_n = \overline{X}_n/\overline{Y}_n$.

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

DELTA METODA

- *Jednorozměrná verze*: Nechť $\{T_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ a nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ, pak

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2), \quad n \to \infty.$$

- *Obecná verze*: Nechť $\{\mathbf{T}_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathsf{N}_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ pro nějaké $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ a $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ pozitivně semi-definitní, a nechť $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)^\mathsf{T} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ má spojitý Jakobián

$$\mathbb{D}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

na nějakém okolí bodu $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$. Pak

$$\sqrt{n}\,(\mathbf{g}(\mathbf{T}_n) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow{D} \mathsf{N}_m(\mathbf{0}, (\mathbb{D}\,\mathbf{g}(\mu))\boldsymbol{\Sigma}(\mathbb{D}\,\mathbf{g}(\mu))^\mathsf{T}), \quad n \to \infty.$$

GAMA FUNKCE $\Gamma(s)$ je definovaná pro $s > 0$ jako

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}dx.$$

Platí $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Speciálně pro $n \in \mathsf{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.