KONVERGENCE POSLOUPNOSTI NÁHODNÝCH VELIČIN
12.10.2017

1. Nechť $X_1, X_2 \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $[0,1]$. Definujme $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ukažte, že pro $n \to \infty$ platí (a) $Y_n \xrightarrow{D} 1$, (b) $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

2. Nechť X_n má diskrétní rovnoměrné rozdělení na $1, 2, \dots, n$. Nechť $Y_n = X_n/n$. Ukažte, že $\{Y_n\}$ konverguje v distribuci k rovnoměrnému rozdělení na $[0,1]$.

3. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny z Poissonova rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda)$.
   (a) Připomeňte si, že $\overline{X}_n$ je maximálně věrohodný odhad λ a jaké má vlastnosti.
   (b) Určete asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda)$.
   (c) Dokažte, že $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\overline{X}_n}}$ konverguje v distribuci k $\mathsf{N}(0,1)$.

4. Ukažte, že t_n- rozdělení konverguje k $\mathsf{N}(0,1)$ pro $n \to \infty$.

5. Nechť $X_n \sim \mathsf{N}(\mu, 1/n)$.
   (a) Ukažte (z definice), že $X_n \xrightarrow{P} \mu$ pro $n \to \infty$.
   (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\sqrt{n}(X_n - \mu)$.
   (c) Uvědomte si vztah (b) a (a).

6. Nechť X_n má rovnoměrné rozdělení na $[0, 1/n]$ a definujte $Y_n = X_n^2$.
   (a) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{X_n\}$ pro $n \to \infty$.
   (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{Y_n\}$ pro $n \to \infty$.

7. Uvažujte posloupnost hodů mincí a náhodné veličiny X_n, které jsou identifikátory toho, zda v n-tém hodu padl orel. Nechť $Y_n = 1 - X_n$ a $X = X_1$.
   (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow{D} X$ a $Y_n \xrightarrow{D} X$, ale $\{X_n + Y_n\}$ nekonverguje v distribuci k $2X$.
   (b) Ukažte, že $(X_n, Y_n)'$ nekonverguje v distribuci k $(X, X)'$ (tj. konvergence po složkách neimplikuje konvergenci vektorů).

8. Cramérova-Woldova věta: $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ právě tehdy, když pro každé $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{t}'\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{t}'\mathbf{X}$. Pomocí předchozí věty a jednorozměrné CLV dokažte mnohorozměrnou verzi centrální limitní věty (tvrzení 1.6.).

9. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} I[x \geq 0]$.
   (a) Ukažte, že $\dfrac{1}{\overline{X}_n} \xrightarrow{P} \lambda$ pro $n \to \infty$.
   (b) Najděte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\dfrac{1}{\overline{X}_n} - \lambda)$.

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je posloupnost k-rozměrných náhodných vektorů a $\mathbf{X}$ je k-rozměrný náhodný vektor. Pak řekneme, že

– $\mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X}$, pokud pro $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(\{\omega : ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| \to 0\}) = 1,$$

– $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\{\omega : ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty,$$

– $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$, pokud pro distribuční funkce platí

$$F_n(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x}) \quad \text{ve všech bodech } \mathbf{x}\text{, ve kterých je } F \text{ spojitá,}$$

kde F_n je distribuční funkce $\mathbf{X}_n$ a F je distribuční funkce $\mathbf{X}$.

PLATÍ:

– konvergence náhodných vektorů implikuje konvergenci po složkách, opak platí jen pro konvergence s.j. a v P,
– platí $\mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ a žádná z implikací obecně opačně neplatí,
– jestliže $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{k} \equiv konst \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{k}$,
– spojitá transformace zachovává všechny uvedené konvergence,
– **Cramérova-Slutského věta** (CS): (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Z_n\}$ jsou posloupnosti náhodných veličin takových, že $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} c$ a $Z_n \xrightarrow{P} d$, kde X je náhodná veličina a $c, d \in \mathbb{R}$ jsou reálné konstanty. Pak

$$Y_n \cdot X_n + Z_n \xrightarrow{D} cX + d.$$

Pro $c \neq 0$ platí také

$$X_n/Y_n \xrightarrow{D} X/c.$$

– **Silný zákon velkých čísel** (SZVČ): Nechť $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ je náhodný výběr z rozdělení s konečnou střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$. Pak $\overline{\mathbf{X}}_n \xrightarrow{s.j.} \boldsymbol{\mu}$ pro $n \to \infty$.
– **Centrální limitní věta** (CLV): Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad n \to \infty.$$

– **Delta metoda** (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{T_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ a nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ, pak

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2), \quad n \to \infty.$$