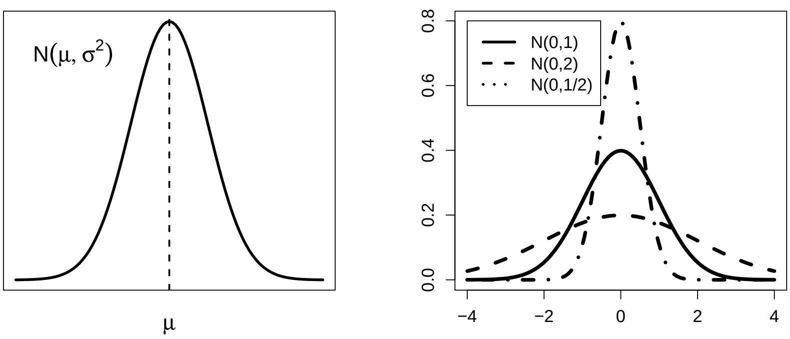
Mnohorozměrné normální rozdělení
5.10.2017

Opakování z druhého ročníku: Jednorozměrné normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

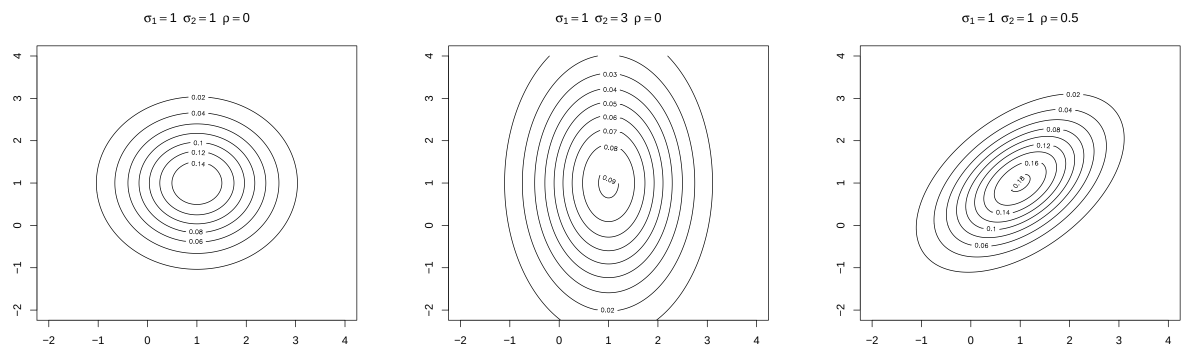
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá **normované** normální rozdělení a značí se $\mathsf{N}(0, 1)$.



- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $\mathsf{E}X = \mu$ a $\mathsf{Var}\,X = \sigma^2$.
- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $aX + b \sim \mathsf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Jsou-li X, Y **nezávislé** normálně rozdělené a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $aX + bY$ má normální rozdělení (s příslušnými parametry).
- Normální rozdělení má v pravděpodobnosti a statistice zcela zásadní význam, viz **centrální limitní věta**.
- Pro $\mathsf{N}(0, 1)$: distribuční funkce se značí jako Φ a kvantily jako q_α. Jejich hodnoty jsou tabelovány.

V druhém ročníku bylo také zadefinováno **dvourozměrné normální rozdělení** náhodného vektoru $(X_1, X_2)' \sim \mathsf{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$, a to pomocí příslušné hustoty $f(x_1, x_2)$, viz skripta Dupač, Hušková str. 50.



Mnohorozměrné normální rozdělení

5.10.2017

Mnohorozměrné normální rozdělení:

Nechť $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_r)'$, kde $Z_i \sim \mathsf{N}(0,1)$ jsou nezávislé. Nechť $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a $A_{n\times r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ je matice. Pak řekneme, že $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{Z}$ má n**-rozměrné normální rozdělení** $\mathsf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, kde $\Sigma = AA^T$.

Na dnešním cvičení nás budou zajímat **vlastnosti** takto definovaného $\mathbf{X}$, viz také kapitola 6 souboru Základy teorie pravděpodobnosti na webu přednášejícího.

Konkrétně budeme zkoumat:
- $\mathsf{E}\mathbf{X}$, $\mathsf{Var}\,\mathbf{X}$,
- rozdělení lineární transformace,
- existence/neexistence hustoty,
- jak teoreticky volit A pro zadané Σ v dvourozměrném případě,
- marginální rozdělení a vztah kovariance a nezávislosti (věta 6.2.),
- vztah $\mathbf{X}$ a χ^2 rozdělení (věta 6.3).

Upozornění
- Existují X, Y, které mají marginální normální rozdělení, ale nemají sdružené normální rozdělení.
- Existují X, Y s marginálním normálním rozdělením, které mají nulovou kovarianci, ale jsou závislé. (Zásadní je předpoklad sdružené normality.)

3D graf hustoty dvourozměrného normální rozdělení: