Úvod do komplexní analýzy — cvičení 8

1)Pomocí rozvoje v mocninnou řadu najděte funkci f holomorfní v 0, pro kterou platí na okolí bodu 0

a)$f'(z) = f(z)$, $f(0) = 2$

b)$(1 + z^2)f'(z) = 1$, $f(0) = 0$

c)$f''(z) + r^2 f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $r > 0$

d)$f''(z) - 2f'(z) + f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

e*)$f''(z)f(z) = e^z$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

2)Určete násobnost kořene funkce v uvedeném bodě

a)$z^5 - 2z^4 + z^3$ v bodě 0

b)$z^5 - 2z^4 + z^3$ v bodě 1

c)$1 - \cos z$ v bodě 0

d)$e^{z^4} - 1$ v bodě 0

e)$e^z - e^{\sin z}$ v bodě 0

3)Spočtěte pro $0 < s < 1$ (integrujte funkci $z^{s-1}e^{iz}$ přes cestu, která konverguje k $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, využijte funkci $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$.)

a)$\int_0^\infty x^{s-1} \cos x dx$

b)$\int_0^\infty x^{s-1} \sin x dx$.

4) Nechť Ω je oblast a f a g jsou holomorfní na Ω. Ukažte, že

a)pokud platí $|f| = |g|$ na nějaké otevřené podmnožině Ω, pak existuje $|\alpha| = 1$ tak, že $f = \alpha g$ na Ω.

b)pokud $|f|$ nabývá v bodě $z \in \Omega$ lokálního ostrého minima, pak $f(z) = 0$.

c)pokud $|f|$ nabývá v bodě $z \in \Omega$ lokálního maxima, pak je f konstantní funkce na Ω.