Úvod do komplexní analýzy — cvičení 7

1)Pomocí Cauchyova vzorce nebo Cauchyovy věty spočtěte

a)$\int_\varphi \frac{z^n}{z-1}dz$, $\varphi(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

b)$\int_\varphi \frac{z^n}{z-2}dz$, $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

c)$\int_\varphi \frac{e^z}{z^m}dz$, $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $m \in \mathbb{Z}$.

d)$\int_\varphi \frac{1}{z^2(z-1)}dz$, $\varphi(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

e)$\int_\varphi \frac{\sin z}{z}dz$, $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

f)$\int_\varphi \frac{1}{z^2(z^2-4)e^z}dz$, $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2)Použijte větu z přednášky k nalezení rozvoje funkce v mocninnou řadu a určete poloměr konvergence

a)Log$z$ v bodě i,

b)e^z v bodě 1,

c)$1/z$ v bodě $-i$.

3)Nechť je funkce f holomorfní na uzavřeném jednotkovém kruhu $\bar{\mathbb{D}}$. Položme

$$d = \sup_{w,z \in \bar{\mathbb{D}}} |f(z) - f(w)|.$$

Ukažte, že

$$2|f'(0)| \leq d.$$

(Ukažte, že platí

$$2f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} dz.)$$

4)Víme, že spojitou reálnou funkci reálné proměnné na uzavřeném intervalu lze stejnoměrně aproximovat polynomy. Může být každá spojitá funkce na $\bar{\mathbb{D}}$ aproximována polynomy v komplexní proměnné z?