Úvod do komplexní analýzy — cvičení 6

1)Pomocí Cauchyovy věty spočtěte

a)$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-itx} dx$, integrujte $e^{-z^2/2}$ přes obdélník $-R, R, R+it, -R+it$ a uvažujte $R \to \infty$. ($\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$)

b)$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos tx dx$.

c)$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$, $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$, integrujte e^{iz^2} přes hranici kruhové výseče $0 \le |z| \le R$ a $0 \le \operatorname{Arg} z \le \pi/4$ a uvažujte $R \to \infty$.

d)$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integrujte $\frac{e^{iz}-1}{z}$ přes hranici oblasti $\{\mathrm{Im} z \ge 0\} \cap B(0,R) \setminus B(0,1/R)$ a uvažujte $R \to \infty$.

e)$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

2)Nechť $p(z) = c_n z^n + \cdots c_1 z + c_0$ je polynom stupně n.

a)Nechť c_k jsou reálná čísla. Dokažte nerovnosti

$$\int_{-1}^{1} f^2(x) dx \le \int_0^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

a

$$\int_{-1}^{1} f^2(x) dx \le \int_{\pi}^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

b)Dokažte

$$\int_{-1}^{1} |f|^2(x) dx \le \pi \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2.$$

c)Dokažte tyto nerovnosti i pro komplexni c_k.

3)Nechť je funkce f holomorfní na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ a spojitá na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$, $R > 0$. Dokažte, že $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$, kde $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4)Nechť má funkce f spojitou komplexní derivaci na otevřené množině Ω a nechť je $T \subset \Omega$ trojúhelník s hranicí τ. Použijte Greenovu větu k důkazu tvrzení

$$\int_{\tau} f(z) dz = 0.$$