Úvod do komplexní analýzy — cvičení 3

1) Najděte derivaci funkcí v bodech, kde existuje.

a)

$$f(z) = \begin{cases} z^2 e^{\frac{1}{iz}} & \text{pokud } z \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } z = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pokud } z \neq 0 \\ 1 & \text{pokud } z = 0 \end{cases}$$

c)

$$g(z) = \begin{cases} z^3 \sin \frac{1}{z^2} & \text{pokud } z \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } z = 0 \end{cases}$$

d)

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1-\cos z}{z^2} & \text{pokud } z \neq 0 \\ 1/2 & \text{pokud } z = 0 \end{cases}$$

2)Najděte všechna řešení následujících rovnic v $\mathbb{C}$.

a) $\sin z - \cos z = i$
b) $\cosh z - \sinh z = 1$
c) $\sinh z - \cosh z = 2i$
d) $\sin z - \cos z = 3$
e) $e^{e^z} = 1$
f) $\sin e^z = 0$

3)Ukažte, že funkce $e^{1/z}$ zobrazuje každé prstencové okolí bodu 0 na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4)Sečtěte

a) $\sinh z + \sinh 2z + \cdots + \sinh nz$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.
b) $\cos z + \cos 3z + \cdots + \cos(2n+1)z$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

5) Nechť má funkce ϕ definovaná na intervalu $[-\pi, \pi)$ Fourierovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\theta}$. Předpokládejme, že existují $K, \epsilon > 0$ tak, že $|c_n| < Ke^{-\epsilon|n|}$. Ukažte, že existuje funkce f holomorfní na $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ tak, že pro $z \in \mathbb{T}$ platí $f(z) = \phi(\mathrm{Arg}(z))$. (Uvažujte $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.)