

Úvod do komplexní analýzy — cvičení 2

1) V kterých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné?

a) $f(z) = |z|$

b) $f(z) = z\bar{z}$

c) $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$

d) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

e) $f(z) = \frac{1}{z^n}, n \in \mathbb{N}$

f) $f(z) = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}, f$ je spojitá větev.

2) Pro funkci $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ najděte funkci $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby funkce $f = f_1 + if_2$ byla holomorfní na definičním oboru, nebo ukažte, že to není možné.

a) $f_1(x, y) = xy$

b) $f_1(x, y) = e^x \sin y$

c) $f_1(x, y) = x^2$

d) $f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2$

e) $f_1(x, y) = \frac{y}{y^2+x^2}$

3) Ukažte, že pokud $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \Omega$ otevřená, mají spojitě druhé derivace a $f = f_1 + if_2$ je holomorfní na Ω , tak $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$

4) Označme

$$f_w(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z},$$

funkci definovanou pro $|w| < 1$. Ukažte:

a) f_w je holomorfní na $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

b) f_w zobrazuje \mathbb{D} do \mathbb{D} . (Pro zjednodušení nejprve ukažte, že stačí příslušnou nerovnost dokazovat pro $z \in \mathbb{R}$.)

c) $f_w(w) = 0$ a $f_w(0) = w$.

d) f_w zobrazuje \mathbb{D} na \mathbb{D} . (Uvažujte $f_w(f_w(z))$)

e) Co se stane, pokud definici rozšíříme pro $|w| \geq 1$?

5) Pro $z = x + iy$ definujeme $f(z) = \sqrt{|xy|}$. Ukažte, že tato funkce splňuje

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

v bodě 0, a přesto není holomorfní na množině $\{0\}$.

6) Mějme konvexní otevřenou množinu Ω . Ukažte, že pokud pro f holomorfní na Ω je \bar{f} také holomorfní na Ω , pak f je konstantní.