Úvod do komplexní analýzy — cvičení 11

Pravidla pro výpočet rezidua Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.

(1) Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(2) Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

(3) Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} fg = f(a) \mathrm{res_a} g$.

(4) Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} fg = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_{-k} je $-k$-tý koeficient Laurentovy řady funkce g v bodě a.

1)Spočtěte

a)$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

b)$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx$

c)$\int_{0}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} dx$

d)$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

e)$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx$

2)Spočtěte hlavní hodnoty integrálů

a)$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x-t)} dx$

b)$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx$

3)Spočtěte

a)$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$

b)$\int_{0}^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x} dx$