Úvod do komplexní analýzy — cvičení 10

Pravidla pro výpočet rezidua Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.

(1) Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(2) Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

(3) Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} fg = f(a)\mathrm{res_a} g$.

(4) Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} fg = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_{-k} je $-k$-tý koeficient Laurentovy řady funkce g v bodě a.

1) Rozviňte funkci v Lauretovy řady se středy v singularitách :

a) $\frac{1}{z(z-1)}$,

b) $z^2 e^{1/z}$

c) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$

1) Najděte rezidua následujících funkcí:

a) $\frac{1}{z^3 - z^5}$

b) $\frac{z^2}{z^2+1}$

c) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

d) $\mathrm{tg} z$

e*) $e^{z+1/z}$

2) Spočtěte křivkové integrály (křivky jsou orientované v kladném smyslu)

a) $\int_{x^2+y^2=2x} \frac{1}{z^4+1} dz$

b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz$

c) $\int_{|z|=r>0} \sin \frac{1}{z} dz$

d) $\int_{|z|=r>0} \sin^2 \frac{1}{z} dz$

e) $\int_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4+1} dz$

3) Spočtěte

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$