

Úvod do komplexní analýzy — cvičení 1

1) Najděte $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$ pro

a) $z = \frac{1}{i}$

b) $z = \frac{1}{1+i}$

c) $z = \frac{2}{1-3i}$

c) $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$

2) Dokažte identity

a) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

b) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

Dále $z_1, z_2 \neq 0$

d) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, součtem množin zde rozumíme množinu součtů

e) $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

f) $\arg(-z_1) = \arg(z_1) + \pi$

g) $\arg(\overline{z_1}) = \arg(1/z_1) = -\arg(z_1)$

3) Zapište komplexní číslo v trigonometrickém tvaru

a) $1 + i$

b) $1 - 2i$

c) $(1 + i)^{2023}$

4) Symbol $\sqrt[n]{z}$ označuje množinu všech řešení rovnice $u^n = z$. (Dvojku vynecháváme.) Najděte

a) \sqrt{i}

b) $\sqrt[3]{1}$

c) $\sqrt[3]{i}$

d) $\sqrt{1-i}$

5) Načrtněte v komplexní rovině tyto množiny

a) $\{z : \operatorname{Im} z > 2\}$

b) $\{z : |z - 1| > 1\}$

c) $\{z : \frac{z}{\overline{z}} = 1\}$

d) $\{z : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}$

e) $\{z : \operatorname{Im} \frac{1}{z} > 1\}$

f) $\{z : \operatorname{Re} \frac{z-i}{z+i} = 0\}$

g) $\{z : \operatorname{Im} z^2 < 0\}$

h) $\{z : \operatorname{Re} z^3 > 0\}$

i) $\{z : |z - i| + |z + i| < 4\}$

j) $\{z : |z + 2| + |z - 2| = 5\}$