1. Množina $\mathbb{C}$

Definice. Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2$.

Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Na množině $\mathbb{C}$ definujeme operace

- sčítání $+$ jako v $\mathbb{R}^2$
- násobení . předpisem

$$(x,y).(u,v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Pozorovaní. Obě operace jsou komutativní.

Pozorovaní. Jednotkovým prvkem je $(1,0)$.

Pozorovaní. K prvku $(x,y) \in \mathbb{C}$, $(x,y) \neq (0,0)$ existuje právě jeden *inverzní prvek* daný předpisem

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

1.1. Základní vlastnosti komplexních čísel.

- Množina $\mathbb{C}$ s operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso.
- Těleso $\mathbb{R}$ je izomorfní podtělesu $\{(x,y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$.
- Na $\mathbb{C}$ není definováno přirozené uspořádání.

Věta. *„Základní věta algebry."* Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Pro polynomy stupně 1 až 4 lze najít předpis pro řešení, pro stupeň 5 a vyšší není znám „algebraický" důkaz. Dokážeme později jako aplikaci komplexní analýzy.

1.2. Zápisy komplexního čísla.

Prvek $(0,1)$ označíme jako i.

- **Algebraický.** Prvek (x,y) zapisujeme jako $x+iy$, prvek $(x,0)$ zkráceně jako x.
- **Maticový.** Prvek (x,y) zapisujeme jako $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Sčítaní a násobení na $\mathbb{C}$ odpovídá sčítání a násobení matic.
- **Trigonometrický.** Prvek (x,y) zapisujeme jako $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

2. Základní operátory na $\mathbb{C}$

Pro $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ definujeme tyto operátory.

- **Reálná část.** $\operatorname{Re} z = x$
- **Imaginární část.** $\operatorname{Im} z = x$
- **Absolutní hodnota (modul).** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$
- **Číslo komplexně sdružené.** $\bar{z} = x - iy$
- **Argument** $\arg z = \varphi$, hlavní hodnota argumentu volba $\varphi \in [-\pi, \pi)$, značíme Arg.

Vlastnosti:
Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí

- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|zw| = |z||w|$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|z| = |\bar{z}|$

3. $\mathbb{C}$ jako metrický prostor

- Metrika na $\mathbb{C}$ je definována jako $d(z, w) = |z - w|$.
- Metrika na $\mathbb{C}$ je izomorfní metrice na $\mathbb{R}^2$.
- Otevřené, uzavřené, kompaktní množiny stejné jako v $\mathbb{R}^2$.
- Limita posloupnosti, limita funkce, spojitost stejné jako v $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{C}$ jako vektorový prostor.

- Vektorový prostor dimenze 2 nad $\mathbb{R}$
- Vektorový prostor dimenze 1 nad $\mathbb{C}$

4. Komplexní funkce reálné proměnné

Komplexní funkce reálné proměnné je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{R}$.
Rozšíření běžných pojmů:

- **Derivace.** Derivací funkce f v bodě x rozumíme číslo
$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$
pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$.)
- **Primitivní funkce.** Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b), jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.
- **Integrál.** Riemannův, Lebesgueův integrál z funkce f definujeme jako
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx,$$

pokud oba integrály na pravé straně konvergují.

Snadná pozorování:
Nechť Nechť $f : M \to \mathbb{C}$, je komplexní funkce reálné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak platí

- $\lim_{x\to a+} f(x) = z$, právě když $\lim_{x\to a+} \mathrm{Re}f(x) = \mathrm{Re}z$ a $\lim_{x\to a+} \mathrm{Im}f(x) = \mathrm{Im}z$. Podobně pro limity zleva a oboustranné.
- f je spojitá (zleva, zprava) v bodě a, právě když obě funkce $\mathrm{Re}f$ a $\mathrm{Im}f$ jsou spojité (zleva, zprava) v bodě a.
- $f'(x)$ existuje, právě když existují vlastní derivace $(\mathrm{Re}f)'(x)$ a $(\mathrm{Im}f)'(x)$. Pak $f'(x) = (\mathrm{Re}f)'(x) + i(\mathrm{Im}f)'(x)$.
- Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b), právě když $\mathrm{Re}F$ je primitivní funkcí k $\mathrm{Re}f$ na (a, b) a $\mathrm{Im}F$ je primitivní funkcí k Imf na (a, b).

Věta. *Odhad integrálu* Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak platí

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

5. Komplexní funkce komplexní proměnné

Komplexní funkce komplexní proměnné je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$.

Definice. Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. Potom derivací funkce f v bodě a rozumíme číslo

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$.)

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω otevřená. Řekneme, že funkce f je *holomorfní* na množině Ω, pokud má v každém bodě Ω derivaci. Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je holomorfní na množině M, pokud existuje $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω otevřená, $M \subset \Omega$ a f je holomorfní na Ω.

Definice. Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá *celá funkce*.

Pro funkci f komplexní proměnné označíme $f_1(x, y) = \mathrm{Re}f(x + iy)$ a $f_2(x, y) = \mathrm{Im}f(x + iy)$ a $\tilde{f} = (f_1, f_2)$.

Věta. *Cauchy-Riemannovy podmínky* Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Věta. Nechť $z = a+ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud existuje $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$.
Poznámky

- Věty o aritmetice a skládání derivací platí pro derivaci komplexní funkce stejně jako pro derivaci reálné funkce.
- Pro funkci f komplexní proměnné a g funkci reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$ platí
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))(g(x))',$$
pokud derivace na pravé straně existují.
- Pokud má f v bodě z derivaci, potom je v z spojitá.
- Pokud $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená konvexní množina a pro každé $z \in \Omega$ platí $f'(z) = 0$, potom f je na Ω konstantní.

6. Mocninné řady

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

nazýváme mocninnou řadou o středu a. Poloměrem konvergence této řady rozumíme $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty) : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \quad \text{konverguje}\}.$$

Množinu
$$U(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\},$$
nazýváme kruhem konvergence této řady.
Věta. Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence.

Věta. Položme
$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$
Potom poloměr konvergence řady (*) je $R = \frac{1}{L}$ pokud $L > 0$ a $R = \infty$ pro $L = 0$. Pokud existuje

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

pak $K = L$.

Pozorovaní. Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

mají stejný poloměr konvergence jako (*).
Pro řadu (*) definujeme funkci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

na $U(a, R)$.

Věta. Funkce f je holomorfní na $U(a, R)$ a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

na $U(a, R)$. Označme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

na $U(a, R)$, potom $F'(z) = f(z)$ na $U(a, R)$.

7. Elementární funkce

7.1. Exponenciální funkce.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujme

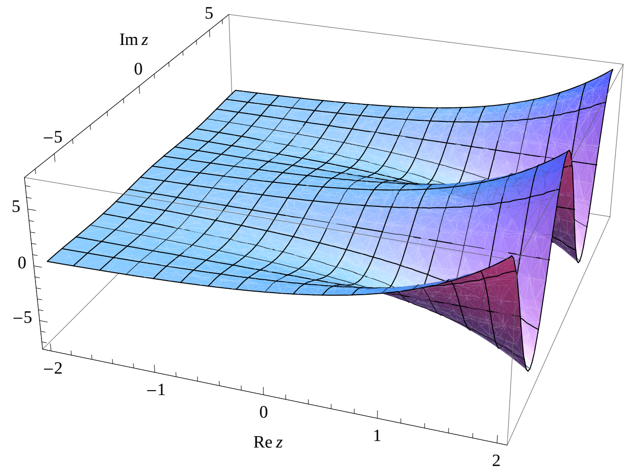
$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Funkci exp nazýváme exponenciální funkce.

Pozorování. Na $\mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí e^x.

Věta. *Vlastnosti funkce* exp.

- Funkce exp je definovaná na $\mathbb{C}$, je na $\mathbb{C}$ holomorfní a platí $\exp'(z) = \exp(z)$ pro $z \in \mathbb{C}$.
- Pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
- *Eulerův vzorec* Pro $b \in \mathbb{R}$ platí $\exp(ib) = \cos b + i \sin b$.
- Pro $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\exp(z) = e^a(\cos b + i \sin b)$.
- Pro $z \in \mathbb{C}$ platí $\exp(z) \neq 0$, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.



OBRÁZEK 1. Re exp(z)

7.2. **Goniometrické a hyperbolické funkce.**

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme:

- Funkci sinus: $\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$.
- Funkci kosinus: $\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$.
- Funkci hyperbolický sinus: $\sinh z = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$.
- Funkci hyperbolický kosinus: $\cosh z = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$.

Pozorování. Na $\mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí.

Věta. *Vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí.*

- Funkce sin, cos, sinh, a cosh jsou definovány na $\mathbb{C}$ a jsou na $\mathbb{C}$ holomorfní.
- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sinh iz = i \sin z, \qquad \cosh iz = \cos z, \qquad \exp(z) = \cos z + i \sin z.$$

- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

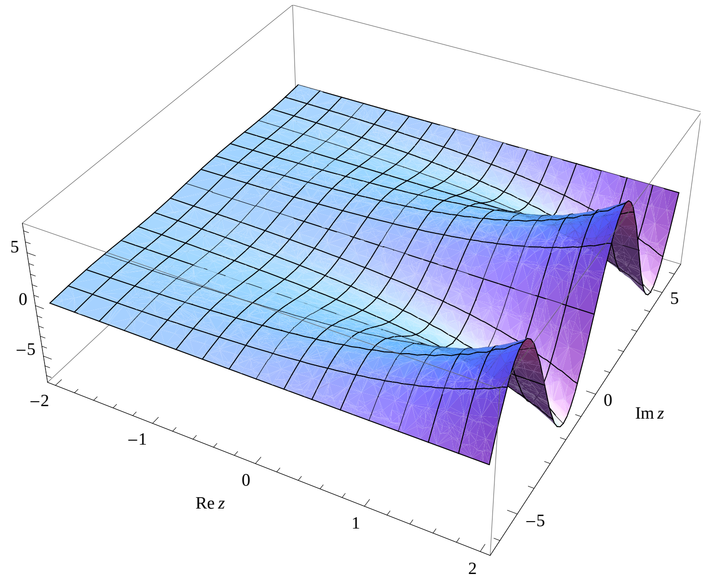
$$\sin' z = \cos z,\ \cos' z = -\sin z,\ \sinh' z = \cosh z,\ \cosh' z = \sinh z.$$

- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- Součtové vzorce platí stejně jako v $\mathbb{R}$.

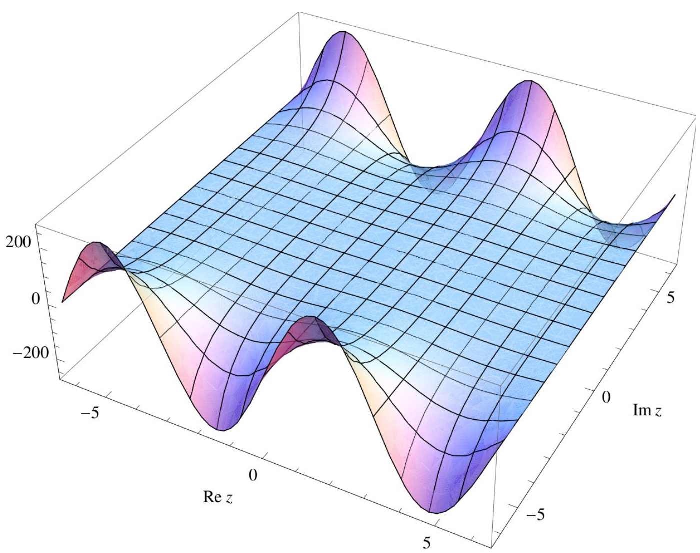
Věta. Funkce exp zobrazuje $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

7.3. **Komplexní logaritmus.**

Reálný logaritmus (definovaný na $(0, \infty)$) budeme značit ln .



Obrázek 2. Im exp(z)

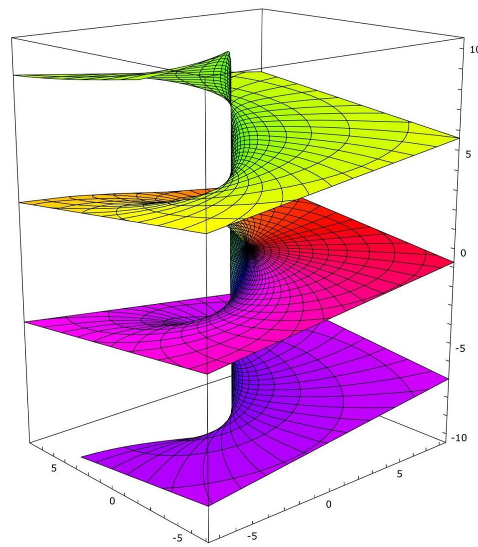


Obrázek 3. Re sin(z)

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\}.$$

Hlavní hodnotou logaritmu z nazveme $\omega \in \log z$ takové, že $\mathrm{Im} w = [-\pi, \pi)$. Hlavní hodnotu značíme $\mathrm{Log} z$.



OBRÁZEK 4. $\operatorname{Im}\log(z)$

Poznámka. Někteří autoři používají opačnou konvenci pro Log a log, nebo jiný interval, např $[0, 2\pi)$.

Věta. *Vlastnosti logaritmu.*

- Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\mathrm{Log} z = \ln|z| + i\mathrm{Arg} z$.
- Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\log z = \{(\mathrm{Log} z) + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Funkce $\mathrm{Log} z$ je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a na této množině platí $\mathrm{Log}' z = 1/z$.

7.4. Obecná komplexní mocnina.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$ značíme

$$z^a = \exp(a\mathrm{Log} z)$$

a

$$m_a(z) = \{\exp(aw) : w \in \log z\}.$$

Pozorování. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $z^0 = 1$, $m_0(z) = \{1\}$. Definice z^n pro $n \in \mathbb{N}$ odpovídá algebraické definici. Dále $z^{-a} = 1/z^a$. Pro $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ má množina $m_a(z)$ n prvků.

8. KŘIVKY V $\mathbb{C}$.

Definice. Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$.

Definice. Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- obrazem křivky rozumíme její obor hodnot, značíme $\langle\varphi\rangle$,
- počátečním bodem křivky rozumíme $\varphi(a)$, koncovým bodem bod $\psi(b)$,
- křivku φ nazýváme uzavřenou, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$,
- opačnou křivkou k φ rozumíme křivku $\dot{-}\varphi : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$.

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ jsou křivky pro které platí $\varphi(b) = \psi(c)$, pak jejich spojením $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b + d - c]$ vztahy $(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \varphi(t)$ pro $t \in [a, b]$ a $(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \psi(t - b + c)$ pro $t \in (b, b + d - c]$.

Příklady křivek

- Orientovaná úsečka $\varphi(t) = z(1 - t) + wt$; $t \in [0, 1]$ (z bodu z do bodu w.)
- Kružnice $\psi(t) = z + re^{it}$; $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ (o středu z a poloměru r.)
- Lomená čára je spojení konečně mnoha orientovaných úseček.

Definice. Cesta je po částech hladká křivka. (Tedy má spojitou derivaci vyjma nejvýše konečně mnoha bodů, ve kterých má derivace vlastní jednostranné limity.)

Definice. Délkou cesty $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ rozumíme

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|(t)dt.$$

Integrál podél cesty

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$. Potom definujeme integrál f podél φ jako

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Věta. *Vlastnosti integrálu podél cesty.* Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$.

- Nechť h je rostoucí C^1 zobrazení intervalu $[c, d]$ na $[a, b]$, pak
$$\int_{\varphi \circ h} f(z)dz = \int_\varphi f(z)dz.$$
- $$\int_\varphi f(z)dz = -\int_{\dot{-}\varphi} f(z)dz.$$

- Nechť $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ je křivka pro kterou platí $\varphi(b) = \psi(c)$, a g je spojitá funkce na $\langle \varphi \dotplus \psi \rangle$, pak
$$\int_{\varphi \dotplus \psi} g(z)dz = \int_{\varphi} g(z)dz + \int_{\psi} g(z)dz.$$
-
$$\left| \int_{\varphi} f(z)dz \right| \leq L(\varphi) \max_{z \in \langle \varphi \rangle} |f(z)|.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci F nazveme primitivní funkcí k f na G pokud
$$F'(z) = f(z)$$
pro každé $z \in G$.

Věta. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní k f na G. Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta taková, že $\langle \varphi \rangle \subset G$. Potom
$$\int_{\varphi} f(z)dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$
Pokud φ je uzavřená křivka, pak $\int_{\varphi} f(z)dz = 0$.

9. Oblast

Definice. Otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je souvislá, pokud neexistují dvě neprázdné disjunktní otevřené množiny $G_1, G_2 \subset \Omega$ takové, že $G_1 \cup G_2 = \Omega$. Souvislou otevřenou množinu v $\mathbb{C}$ nazýváme oblast.

Definice. Otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je křivkově souvislá, pokud pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje křivka φ tak, že $z, w \in \langle \varphi \rangle \subset \Omega$.

Věta. *Charakterizace oblasti.* Otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je souvislá, právě když je křivkově souvislá. (Dále platí, že každé dva body Ω lze spojit lomenou čarou.)

Věta. *Primitivní funkce a křivkový integrál.* Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmíky jsou ekvivalentní

(1) f má v Ω primitivní funkci.

(2) Pro každé dvě cesty $\varphi : [a,b] \to \Omega$ a $\psi : [c,d] \to \Omega$ takové, že $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$ platí
$$\int_{\varphi} f(z)dz = \int_{\psi} f(z)dz.$$

(3) Pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a,b] \to \Omega$ platí
$$\int_{\varphi} f(z)dz = 0.$$

10. Technické věty o křivkovém integrálu

Věta. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta

- Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n spojité na $\langle\varphi\rangle$. Nechť funkce f_n konvergují stejnoměrně na $\langle\varphi\rangle$ k funkci f. Potom $\int_\varphi f_n(z)dz \to \int_\varphi f(z)dz$.
- Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak funkce
$$g(z) = \int_\varphi F(w, z)dw$$
je spojitá na G.

Věta. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta, $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina, $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a komplexní derivace F podle druhé proměnné je spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$. Pak funkce
$$g(z) = \int_\varphi F(w, z)dw$$
je holomorfní na G a pro $z \in G$ platí
$$g'(z) = \int_\varphi \frac{\partial}{\partial z} F(w, z)dw.$$

11. Přírůstek logaritmu podél cesty

Věta. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta a funkce f je holomorfní a nenulová na $\langle\varphi\rangle$ a f' je na $\langle\varphi\rangle$ spojitá. Nechť $L_a \in \log(f(\varphi(a)))$. Potom funkce
$$L(t) = L_a + \int_{\varphi_t} \frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$
kde $t \in [a, b]$ a φ_t je křivka definovaná na $[a, t]$ jako $\varphi_t(s) = \varphi(s)$, je spojitá a platí $e^{L(t)} = f(\varphi(t))$.

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta a funkce f je holomorfní a nenulová na $\langle\varphi\rangle$ a f' je na $\langle\varphi\rangle$ spojitá. Pak $\Delta_\varphi \log f = \int_{\varphi_t} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ nazveme přírůstek logaritmu f podél cesty φ. Funkce L z předešlé věty se nazývá spojitá větev logaritmu podél cesty φ.

Pozorování. Dvě spojité větve logaritmu podél cesty se liší o celočíselný násobek $2\pi i$.

11.1. **Přírůstek logaritmu podél křivky.**

Je možné rozšířit definici větve logaritmu i na křivky.

Věta. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je křivka a funkce f je spojitá a nenulová na $\langle\varphi\rangle$. Pak existuje spojitá funkce $L(t)$ na $[a, b]$ taková, že $e^{L(t)} = f(\varphi(t))$. Pokud L_1 a L_2 jsou dvě takové funkce, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $L_1 + 2k\pi i = L_2$.

Definice. $\Delta_\varphi \log f = L(b) - L(a)$ nazveme přírůstek logaritmu f podél křivky φ. Funkce L z předešlé věty se nazývá spojitá větev logaritmu podél křivky φ.

Pozorování. Pokud je φ cesta, je přírůstek logaritmu podél cesty φ roven přírůstku logaritmu podél křivky φ.

11.2. **Index bodu k cestě.**

Definice. Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak index bodu a vzhledem k cestě φ je definován jako

$$\mathrm{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z - a}.$$

Pozorování. $\mathrm{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\varphi \log(z - a)$.

Poznámka. Pomocí přírůstku logaritmu je možné definovat index bodu k uzavřené křivce.

11.3. **Komponenta.**

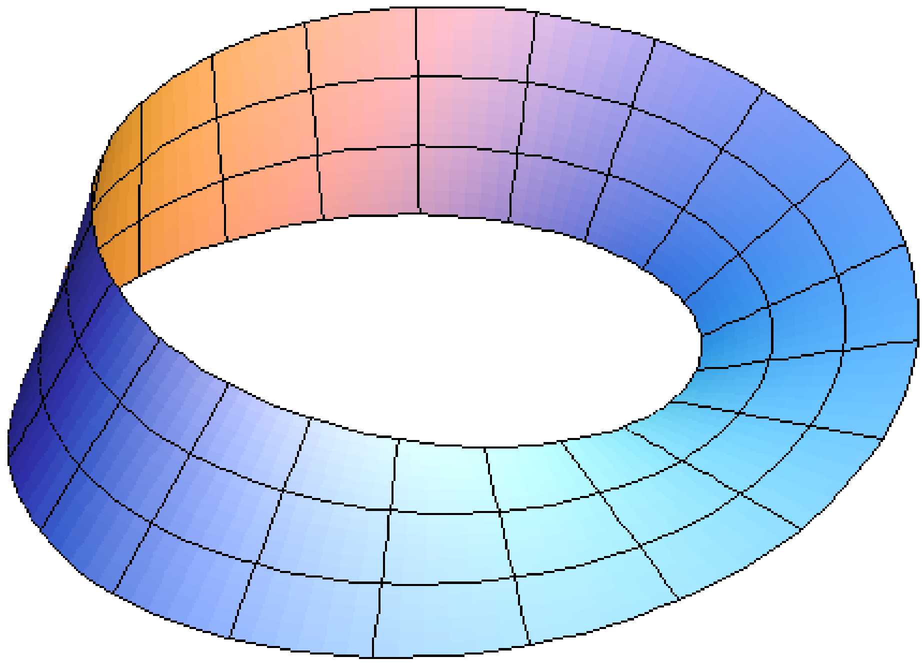
Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je možina. Množinu $A \subset M$ nazveme komponentou A, pokud je maximální souvislou podmnožinou M.

Pozorování. Komponenty otevřené množiny jsou otevřené.

11.4. **Vlastnosti indexu.**

Věta. Nechť φ je uzavřená cesta, pak funkce ind_φ je definovaná na $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ a platí

(1) Funkce ind_φ nabývá pouze celočíselných hodnot,
(2) funkce ind_φ je konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$
(3) a funkce ind_φ je nulová na neomezené komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.



Obrázek 5. Na Möbiově proužku Jordanova věta neplatí

11.5. **Jordanova věta (bez důkazu).**

Věta. *Jordanova věta pro cesty.* Nechť cesta $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je prostá na $[a, b)$ a uzavřená. Pak množina $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ má právě dvě komponenty, jednu omezenou a jednu neomezenou. Index bodů na omezené komponentě k φ je buď 1 nebo -1.

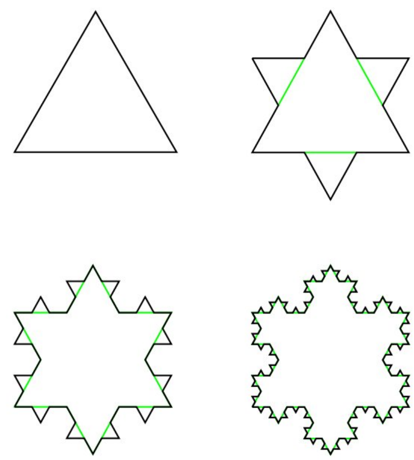
Věta. *Jordanova věta pro křivky.*Nechť křivka $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je prostá na $[a, b)$ a uzavřená. Pak množina $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ má právě dvě komponenty, jednu omezenou a jednu neomezenou.

12. Cauchyova věta

12.1. **Cauchyova věta pro trojúhelník.**

Pro tři body $z, v, w \in \mathbb{C}$ definujeme $\tau_{z,v,w} = [z, v] \dot{+} [v, w] \dot{+} [w, z]$, ($[z, v]$ je úsečka spojující z a v) a $T_{z,v,w}$ množinu všech konvexních kombinací z, v, w. (T je trojúhelník, τ je jeho hranice.)

Věta. *Cauchy-Goursatova* Nechť $z, v, w \in \Omega \subset \mathbb{C}$, kde Ω otevřená, $T_{z,v,w} \subset \Omega$, nechť $p \in \Omega$ a nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na



Obrázek 6. Kochova křivka

$\Omega \setminus \{p\}$. Potom

$$\int_{\tau_{z,v,w}} f(z)dz = 0.$$

12.2. **Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu.**

Definice. Množina $M \subset \mathbb{C}$ se nazývá hvězdovitá, pokud existuje $z_0 \in M$ tak, že pro každé $z \in M$ je úsečka $[z_0, z]$ celá obsažená v M.

Věta. *Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu.* Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina a nechť $p \in \Omega$. Nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Potom f má primitivní funkci na Ω. (A tedy pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a, b] \to \Omega$ platí $\int_\varphi f(z)dz = 0$.)

12.3. **Lepení primitivních funkcí. Pozorování.** Nechť jsou množiny $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ otevřené a množina $G_1 \cap G_2$ je souvislá. Nechť funkce f má primitivní funkci v G_1 i v G_2. Potom f má primitivní funkci $G_1 \cup G_2$.

13. Cauchyův vzorec

13.1. **Cauchyův vzorec pro kruh.**

Věta. *Cauchyův vzorec pro kruh* Nechť funkce f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ a nechť $\varphi(t) = a + re^{it}$,

$t \in [0, 2\pi]$. (Kružnice o středu a a poloměru r.) Potom pro každé $w \in U(a,r)$ platí

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Dále má funkce f v bodě w derivace všech řádů a platí

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz.$$

Pozorování. Funkce holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$ má na této množině derivace všech řádů.

Pozorování. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, nechť $p \in \Omega$ a nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Potom f je holomorfní na Ω.

13.2. **Cauchyův vzorec — důsledky.**

Pozorování. Nechť funkce f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$, potom

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Věta. *Vyjádření mocninnou řadou* Nechť funkce f je holomorfní na $U(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak f je na $U(a,r)$ součtem mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde pro $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

a $c_0 = f(a)$.

Věta. *Cauchyův odhad* Nechť funkce f je na $U(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ součtem řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Pro $0 < \varrho < r$ označíme $M_\varrho = \sup\{|f(z)|; |z-a| = \varrho\}$. Potom pro $n \geq 0$ celé platí

$$c_n \leq \frac{M_\varrho}{\varrho^n}.$$

Věta. *Liouvilleova* Každá omezená celá funkce je konstantní.

Věta. *„Základní věta algebry.“* Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Věta. *O kořenech* Nechť funkce f je holomorfní na $U(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Nechť $f(a) = 0$ a f není konstantní na $U(a,r)$. Pak existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ a právě jedna funkce g holomorfní v $U(a,r)$ tak, že pro každé $z \in U(a,r)$

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

a $g(a) \neq 0$.

Věta. *O jednoznačnosti* Nechť Ω je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω. Nechť množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω. Potom $f = g$ na Ω.

Věta. *Princip maxima modulu* Nechť Ω je oblast a f je holomorfní funkce na Ω, pak $|f|$ nenabývá nikde v Ω ostrého lokálního maxima.

Věta. Nechť Ω je omezená oblast a f je holomorfní funkce na Ω která je spojitá na $\bar{\Omega}$. Pak $|f|$ nabývá svého maxima na $\bar{\Omega}$ v bodě, který leží na hranici Ω.

Věta. *Morerova* Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f je spojitá funkce na G taková, že pro každý trojúhelník $T \subset G$ s hranicí τ platí

$$\int_\tau f(z)dz = 0,$$

pak f je holomorfní na G.

Věta. *Weierstrassova* Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f_n jsou holomorfní funkce, které lokálně stejnoměrně konvergují k funkci f. Pak f je holomorfní v G a pro každé $m \in \mathbb{N}$ funkce $f_n^{(m)}$ konvergují k $f^{(m)}$ lokálně stejnoměrně.

14. Rozšíření množiny $\mathbb{C}$

14.1. **Prvek ∞.**

Množinu $\mathbb{C}$ rozšíříme o prvek ∞. Značíme $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro $\varepsilon > 0$ označíme

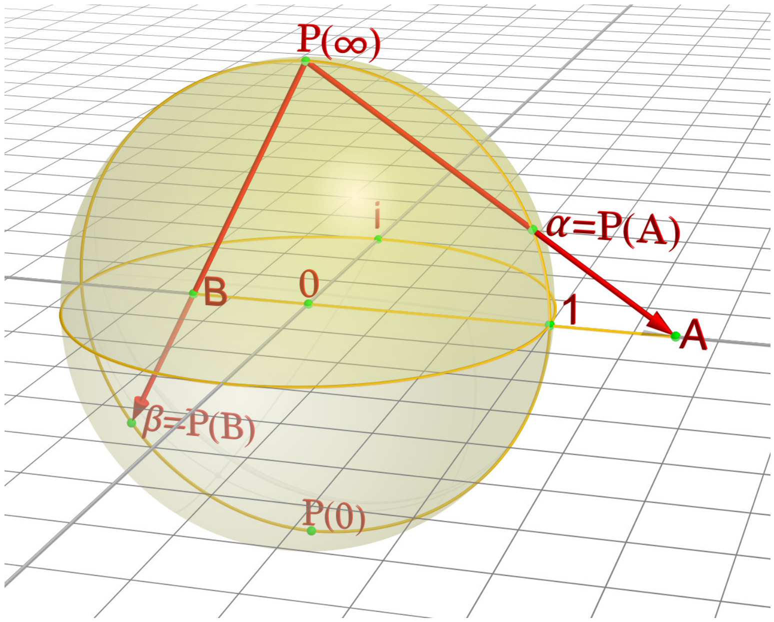
$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{ z : |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Také pro $a \in \bar{\mathbb{C}}$ a $r > 0$ označíme

$$P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\}.$$

(Prstencové okolí a.)

Definice. Řekneme, že funkce $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ má limitu $A \in \bar{\mathbb{C}}$ v $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $w \in U(z_0, \delta) \setminus$



Obrázek 7. Sterografická projekce, Riemannove sféra

$\{z_0\}$ platí $f(w) \in U(A, \varepsilon)$. Pokud má funkce f v bodě z_0 limitu $f(z_0)$, řekneme, že je f spojitá v z_0.

Poznámka. Pro symbol ∞ a $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ funguje aritmetika limit takto: $z + \infty = z - \infty = \infty$, $w \cdot \infty = \frac{w}{0} = \infty$, $\frac{\infty}{z} = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$. Naopak výrazy jako $\infty + \infty$ nebo ∞ / ∞ nejsou definovány.

14.2. **Stereografická projekce.**

Definice. V $\mathbb{R}^3$ označíme S^2 jednotkovou sféru $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Definujeme zobrazení

$$\chi(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}$$

pro $z \neq 0$ a $\chi(0, 0, 1) = \infty$. Toto zobrazení se nazývá stereografická projekce.

Pozorování. Zobrazení χ je homeomorfismus $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ a $\mathbb{C}$. (Také je to homeomorfismus $\bar{\mathbb{C}}$ a S^2.) Pokud označíme inverzní zobrazení k $P = \chi^{-1}$, můžeme na $\bar{\mathbb{C}}$ definovat metriku $d(z, w) = |P(z) - P(w)|$, která vede k pojmu limity, který se shoduje s výše definovanou limitou.

15. Klasifikace singularit

Věta. *Casorati-Weierstrassova* Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, a funkce f je holomorfní na $P(a, r)$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:

(1) Existuje takové $\varrho \in (0, r)$, že f je omezená na $P(a, \varrho)$. Pak existuje vlastní $\lim_{z \to a} f(z)$. Dodefinujeme-li funkci f v bodě a hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a, r)$. Pak říkáme, že f má v bodě a odstranitelnou singularitu.

(2) $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z \to a} (z - a)^p f(z)$. Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-1}, \dots, a_{-p}$ tak, že funkce

$$f(z) - \frac{a_{-1}}{(z-a)} - \cdots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. Pak říkáme, že f má v bodě a pól násobnosti p.

(3) $\lim_{z \to a} f(z)$ neexistuje. Pak pro každé $\varrho \in (0, r)$ je množina $f(P(a, \varrho))$ hustá v $\mathbb{C}$. Říkame, že f má v a podstatnou singularitu.

15.1. Vlastnosti funkce v ∞.

Definice. Nechť je funkce f definovaná na $U(\infty, r)$, $r > 0$. Potom řekneme, že funkce f je holomorfní v ∞, resp. že f má kořen násobnosti p v ∞, pokud má tyto vlastnosti funkce $g(z) = f(1/z)$ v 0.

Definice. Nechť je funkce f definovaná na $P(\infty, r)$, $r > 0$. Potom řekneme, že funkce f má v bodě ∞ odstranitelnou singularitu, pól násobnosti p, nebo podstatnou singularitu pokud má má tyto vlastnosti funkce $g(z) = f(1/z)$ v 0.

16. Laurentova řada

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{*}$$

nazýváme *Laurentovou řadou* o středu a. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazýváme regulární částí řady (*) a řadu

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

nazýváme hlavní část řady (*).

Definice. Pro $0 \le r < R \le \infty$ a $a \in \mathbb{C}$ označíme

$$P(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\},$$

tuto množinu nazýváme mezikruží o středu a, vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R.

Pozorování Pro Laurentovou řadu (*) existují $r, R \in [0,\infty]$ tak, že regulární část řady konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(a,R)$ a diverguje na $\mathbb{C} \setminus \bar{U}(a,R)$ a hlavní část řady konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C} \setminus \bar{U}(a,r)$ a diverguje na $U(a,r)$. Pokud je množina $P(a,r,R)$ neprázná, nazveme jí mezikružím konvergence.

Pozorování Nechť $0 \le r < R \le \infty$, $a \in \mathbb{C}$ a $\theta \in [0,2\pi]$, pak na množině

$$P(a,r,R) \setminus \{a + te^{i\theta}; t \in [0,\infty)\}$$

má každá holomorfní funkce primitivní funkci.

16.1. **Cauchyův vzorec pro mezikruží.**

Věta. *Cauchyův vzorec pro mezikruží* Nechť funkce f je holomorfní na $P(a,r,R)$, $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$, označme pro $\varrho \in (r,R)$ $\varphi_\varrho(t) = a + \varrho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Potom $\int_{\varphi_\varrho} f(z)dz$ nezávisí na ϱ a pro $z \in P(a,r,R)$ a $r < \varrho_1 < |z-a| < \varrho_2 < R$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varrho_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varrho_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

16.2. **Vyjádření Laurentovou řadou.**

Věta. *Vyjádření Laurentovou řadou* Nechť funkce f je holomorfní na $P(a,r,R)$, $a \in \mathbb{C}$ a $0 \le r < R \le \infty$. Pak f je na $P(a,r,R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde pro $n \in \mathbb{Z}$ a $\varrho \in (r,R)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\varrho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Věta. Nechť funkce f je holomorfní na $P(a,0,R)$, $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R \leq \infty$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

je Laurentovou řadou funkce f na $P(a,0,R)$. Pak funkce f má v a

(1) odstranitelnou singularitu, pokud pro každé celé $n < 0$ $c_n = 0$,
(2) pól, pokud existuje celé $p < 0$, $c_p \neq 0$ a pro každé celé $n < p$ $c_n = 0$,
(3) podstatnou singularitu, pokud $c_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho celých čísel $n < 0$.

17. Reziduová věta

Definice. *Reziduum* Nechť funkce f je holomorfní na $P(a,0,R)$, $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R \leq \infty$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

je Laurentovou řadou funkce f na $P(a,0,R)$. Pak reziduem f v bodě a nazveme číslo

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}.$$

Věta. *Reziduová věta* Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a,b] \to \Omega \setminus M$ uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_\varphi g(z)dz = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω . Pak pro každou funkci f holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí

$$\int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\varphi a \operatorname{res}_a f.$$

Pozorování. *Pravidla pro výpočet rezidua* Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.

(1) Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(2) Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.
(3) Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} fg = f(a)\mathrm{res_a} g$.

(4) Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} fg = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_{-k} je $-k$-tý koeficient Laurentovy řady funkce g v bodě a.

Lemma. *Jordanovo* Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg} z \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$\lim_{|z|\to\infty; \mathrm{Arg} z \in [\alpha,\beta]} f(z) = 0.$$

Nechť pro $r > 0$ a $t \in [\alpha, \beta]$ je $\varphi_r(t) = re^{it}$. Pak pro každé $x > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} e^{ixz} f(z) dz = 0.$$

Lemma. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a. Dále nechť $\alpha < \beta$, $r > 0$ a $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pokud je f holomorfní v a, pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z) dz = 0,$$

pokud má f v a pól násobnosti 1, pak

$$\lim_{r\to 0} \int_{\varphi_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \mathrm{res}_a f.$$

18. Globální Cauchyova věta

18.1. Řetězce a cykly.

Definice *Řetězce a cykly* Nechť $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ jsou cesty, nechť $K = \langle\gamma_1\rangle \cup \dots \cup \langle\gamma_n\rangle$. Na prostoru spojitých funkcí $C(K)$ definujeme lineární funkcionály $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ vzorcem

$$\tilde{\gamma}_k(f) = \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Dále definujeme formální součet

$$\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n,$$

kde

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1 \dotplus \dots \dotplus \tilde{\gamma}_n,$$

a položíme

$$\int_\Gamma f(z)dz = \tilde{\Gamma}(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Takto definovaný formální součet se nazývá *řetězec,* pokud je navíc každá cesta γ_k uzavřená, nazveme Γ *cykl.* Položíme $\langle\Gamma\rangle = K$. Pokud je Γ cykl, definujeme pro $w \in \mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$

$$\mathrm{Ind}_\Gamma w = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-w}.$$

18.2. **Cauchyova věta a Residuová věta.**

Věta *Globální Cauchyova věta* Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a nechť Γ je cykl s $\langle\Gamma\rangle \subset G$. Nechť pro každé $w \notin G$ $\mathrm{Ind}_\Gamma w = 0$. Nechť f je funkce holomorfní na G. Potom pro $u \in G \setminus \langle\Gamma\rangle$

$$f(u)\mathrm{Ind}_\Gamma u = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-u}$$

a

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Věta. *Globální Reziduová věta* Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $M \subset G$ konečná množina a Γ je cykl s $\langle\Gamma\rangle \subset G \setminus M$. Nechť pro $w \notin G$ $\mathrm{Ind}_\Gamma w = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in M} \mathrm{ind}_\Gamma a \, \mathrm{res}_a f.$$