Řetězové zlomky a dobré aproximace

Motivace. Chceme-li znát přibližnou hodnotu nějakého iracionálního čísla, obvykle používáme jeho (nekonečný) desetinný rozvoj. Z takového rozvoje, řekněme z rozvoje

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51\ldots$$

čísla π, ale nijak nevidíme např. to, že π lze velmi přesně, s chybou řádu desetimiliontin, odhadnout pomocí poměrně jednoduchého zlomku

$$\pi \sim \frac{355}{113}.$$

To vede k otázce, jaké zlomky lze považovat za vhodné aproximace iracionálních čísel (případně jaké zlomky s malým jmenovatelem lze považovat za dobré aproximace zlomků s velkým jmenovatelem).

Uvažujme zlomek $^{22}/_{7}$, který také aproximuje π s poměrně vysokou přesností, odchylka je zhruba 0.00126. Chceme-li se dostat k π blíže, můžeme použít zlomek $^{179}/_{57}$, který má odchylku zhruba 0.00124. Je ovšem otázka, zda chceme $179/57$ opravdu považovat za lepší aproximaci. Snížení odchylky o necelá dvě procenta jsme totiž zaplatili více než osminásobně větším jmenovatelem. Pojem *dobré aproximace*, který budeme sledovat, vychází z rozhodnutí nezvyšovat jmenovatele, dokud příslušné zlepšení nebude nejméně tolikanásobné, kolikanásobné je zvýšení jmenovatele. V takovém případě překoná odhad $^{22}/_{7}$ až zlomek $^{333}/_{106}$, jehož odchylka od π je zhruba $8.3 \cdot 10^{-5}$. To je podle zvolené strategie lepší, ačkoli jen těsně: jmenovatel se zvýšil asi 15.14-krát, zatímco odchylka se zmenšila 15.18-krát. Na další zlepšení, tentokrát výrazné, není nutné, jak jsme už zmínili, čekat dlouho; zvýšením jmenovatele ze 106 na 113 dosáhneme snížení odchylky téměř třistanásobného.

Definice dobré aproximace. Předchozí úvahy ukazují, že za dobrou považujeme aproximaci čísla α, která má co nejmenší součin jmenovatele a odchylky zlomku od aproximovaného čísla; snažíme se tedy minimalizovat hodnotu

$$q \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = |q\alpha - p|\,.$$

Z tohoto vztahu dostáváme jinou přirozenou charakteristiku dobré aproximace: je to takový násobek α, který je blízko celému číslu, blíže než všechny menší násobky. V případě π ukazuje příslušnou odchylku u zmíněných jmenovatelů následující tabulka:

q	zaokrouhlení $q \cdot \pi$	zaokrouhlovací chyba
7	22	0.00885
57	179	0.07078
106	333	0.00882
113	355	0.00003

Označme $\|r\|$ jako chybu zaokrouhlení $r \in \mathbb{R}$, tedy jako vzdálenost r od nejmenšího celého čísla. Nyní už můžeme definovat dobré aproximace formálně.

Definice. Řekneme, že dvojice $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ je *dobrou aproximací* čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, pokud pro libovolné přirozené q' menší než q platí

$$\|q\alpha\| < \|q'\alpha\|$$

a navíc

$$\|q\alpha\| = |q\alpha - p|\,.$$

Je vidět, že aproximace je dána především číslem q, číslo p se dopočítá jednoduše jako zaokrouhlení $q\alpha$. Tedy p je dáno jednoznačně vždy, kromě případu, kdy $q\alpha$ je lichý násobek $1/2$ a chyba zaokrouhlení je $1/2$. To je ovšem největší možná chyba, která je přípustná nanejvýš pro první dobrou aproximaci, což je vždy aproximace celočíselná, jak plyne přímo z definice. Kromě situace, kdy aproximujeme racionální číslo tvaru $2z+1/2$, je tedy posloupnost dobrých aproximací dána jednoznačně.

Je také zřejmé, že čísla p a q definující dobrou aproximaci musejí být nesoudělná, protože $(p/d, q/d)$, kde $d = \operatorname{nsd}(p,q)$, je pro $d > 1$ určitě lepší aproximací než (p,q).

Vzhledem k tomu, že u dobrých aproximací hrají významnou roli právě jmenovatelé (a čitatelé se jen dopočítávají), říkejme jmenovatelům dobrých aproximací *dobré jmenovatele*.

Konvence. Z praktického hlediska je vhodné považovat za první dobrou aproximaci čísla α vždy jeho spodní část, celé číslo $\lfloor\alpha\rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le \alpha\}$. A to přesto, že je dobrou aproximací podle uvedené definice pouze v případě, kdy $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor \le 1/2$. V takto upravené definici má tedy např. číslo $\sqrt{8}$ dvě dobré celočíselné aproximace (tedy dobré aproximace se jmenovatelem jedna), a to 2 a 3.

Dobré aproximace aproximují libovolně dobře. Pokud je $\alpha = a/b$ racionální, je poslední dobrou aproximací právě (a,b) (předpokládáme, že a/b je ve zkráceném tvaru) s nulovou odchylkou.

Pro iracionální α samozřejmě nulové odchylky nedosáhneme nikdy, takže je otázkou, jestli můžeme α aproximovat libovolně přesně. Je zřejmé, že můžeme nacházet stále lepší racionální aproximace, ale není na první pohled zřejmé, že to budou aproximace dobré, tj. že jmenovatel neporoste v porovnání se zpřesněním aproximace příliš rychle.

Pokud ale použijeme definici dobré aproximace čísla α, vidíme, že to jsou podle definice „rekordy"v posloupnosti

$$\|1\cdot\alpha\|\,, \|2\cdot\alpha\|\,, \|3\cdot\alpha\|\,, \ldots, \|n\cdot\alpha\|\,, \ldots,$$

což je posloupnost čísel z intervalu $[0,1)$.

Označme $\langle\alpha\rangle$ necelou část čísla α, tedy $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor$, jinak též $\alpha \mod 1$. S rostoucím n bude množina bodů $\langle q\cdot\alpha\rangle$, $q = 1,2,\ldots,n$, v intervalu $[0,1)$ stále hustší, přesněji řečeno, pro každé n existují dva body (počítáme i krajní body intervalu), které jsou od sebe vzdáleny nejvýše $1/n+1$. Pokud je např. $\langle k\cdot\alpha\rangle$ vzdálena nejvýše $1/n+1$ od nuly nebo jedničky, je zjevně $\|k\cdot\alpha\| \le 1/n+1$. Pokud jsou oba blízké body vnitřní, tedy

$$0 < \langle i\cdot\alpha\rangle - \langle j\cdot\alpha\rangle \le 1/n+1,$$

pak je $\|k\cdot\alpha\| \le 1/n+1$ pro $k = |i-j|$. Všimněme si, že mohou nastat dva případy:

- $i > j$, $k = i - j$ a $\langle k\cdot\alpha\rangle$ je blízko nule (zaokrouhlujeme dolů);
- $i < j$, $k = j - i$ a $\langle k\cdot\alpha\rangle$ je blízko jedničce (zaokrouhlujeme nahoru).

Uvažujme nyní dva po sobě jdoucí dobré jmenovatele $q < q'$. Protože je $\|q\cdot\alpha\|$ nejmenším číslem až po $\|(q'-1)\cdot\alpha\|$, plyne z výše provedených úvah

$$(\diamond) \qquad \|q\cdot\alpha\| \le \frac{1}{q'}.$$

Dále z těchto úvah plyne, že dobré aproximace jsou libovolně přesné, a v případě iracionálního čísla je jich tedy nekonečně mnoho.

Vlastnosti posloupnosti dobrých aproximací. Označme (p_i, q_i), $i = 1, 2, \dots$ posloupnost dobrých aproximací nějakého čísla α. Posloupnost je konečná, právě když je α racionální. Výše jsme viděli, že

$$\|q_i \cdot \alpha\| = q_i \cdot \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \le \frac{1}{q_{i+1}},$$

odtud

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \le \frac{1}{q_i \cdot q_{i+1}}.$$

Připomeňme, že podle naší konvence je $(p_1, q_1) = (\lfloor\alpha\rfloor, 1)$, což na platnosti uvedených nerovností nic nemění. Uvažme dva po sobě jdoucí dobré jmenovatele q_i a q_{i+1}. Pokud by byla obě čísla $\langle q_i \cdot \alpha\rangle$ a $\langle q_{i+1} \cdot \alpha\rangle$ blízko nule, dostali bychom, že $\langle (q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha\rangle$ je velmi blízko jedničce, přesněji $\|(q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha\| = \|q_i \cdot \alpha\| - \|q_{i+1} \cdot \alpha\| < \|q_i \cdot \alpha\|$, přičemž je ale $q_{i+1} - q_i < q_{i+1}$. To je spor s tím, že q_{i+1} je dobrý jmenovatel následující vzápětí po dobrém jmenovateli q_i.

Výše uvedené výpočty jsou názorné počítáme-li „modulo jedna". Je ale také možné (ale méně elegantní) počítat s pomocí čitatelů: Vidíme, že $q_{i+1} \cdot \alpha - p_{i+1} < q_i \cdot \alpha - p_i$ jsou dvě kladná čísla. Proto platí, že $(q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha - (p_{i+1} - p_i)$ je číslo záporné, přičemž $(p_{i+1} - p_i) - (q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha < q_i \cdot \alpha - p_i$.

Podobně dostaneme spor, pokud budeme předpokládat, že obě čísla $\langle q_i \cdot \alpha\rangle$ a $\langle q_{i+1} \cdot \alpha\rangle$ jsou blízko jedničce. Z toho je vidět, že znaménka čísel $q_i\alpha - p_i$ se střídají. Jinak řečeno, pro liché i (a iracionální α) je

$$(\clubsuit) \qquad \frac{p_i}{q_i} < \alpha < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}.$$

(Liché dobré aproxiamce dávají vždy spodní odhady díky přijaté konvenci, že první dobrou aproximací je dolní celá část.)

Délku intervalu, kterým je α odhadnuto dvěma po sobě jdoucími dobrými aproximacemi lze díky následujícímu tvrzení určit přesně jako

$$\left|\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{q_i q_{i+1}}.$$

Tvrzení.

$$(\spadesuit) \qquad p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i = (-1)^i$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro liché i, pro sudé i je důkaz obdobný. Z nerovností $(\clubsuit)$ a $(\diamond)$ dostáváme, že

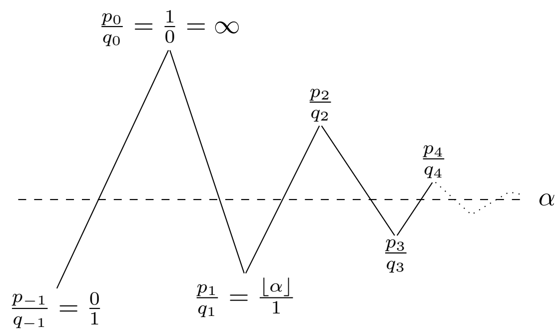
$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{i+1}} &\ge \|q_i \cdot \alpha\| = q_i\alpha - p_i > 0, \\ \frac{1}{q_i} &> \|q_{i+1} \cdot \alpha\| = p_{i+1} - q_{i+1}\alpha \ge 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$2 > q_{i+1} q_i \alpha - p_i q_{i+1} + q_i p_{i+1} - q_{i+1} q_i \alpha = q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} > 0.$$

Tedy $q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} = 1$ a důkaz je hotov. □

Nyní již můžeme dokázat následující tvrzení, které popisuje rekurzivní proces konstrukce dobrých aproximací pomocí posloupnosti přirozených čísel. Kvůli začátku procesu dodefinujme $p_{-1} = 0$, $q_{-1} = 1$ a $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, což odpovídá „minus první dobré aproximaci"pomocí nuly a „nulté dobré aproximaci"pomocí $+\infty$. Všimněme si, že tato volba odpovídá tomu, že sudé aproximace jsou horní a liché spodní. Navíc platí vztah (♠) i pro $i = -1$ a $i = 0$.



Tvrzení. Existují přirozená čísla $a_0, a_1, \dots$ taková, že pro všechna $i \geq 0$ platí

$$(\heartsuit) \qquad \begin{aligned} p_{i+1} &= a_i p_i + p_{i-1}, \\ q_{i+1} &= a_i q_i + q_{i-1}. \end{aligned}$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení platí

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i,$$

odkud plyne

$$q_i(p_{i+1} - p_{i-1}) = p_i(q_{i+1} - q_{i-1}).$$

Protože jsou čísla p_i a q_i nesoudělná, je číslo a_i definované jako

$$a_i := \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{p_i} = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{q_i}$$

přirozené a dokazované vztahy platí. □

Jak získat posloupnost (a_i) je hezky vidět ze souvislosti mezi dobrými aproximacemi a řetězovými zlomky, kterou ukážeme nyní.

Řetězové zlomky. Nechť a_0 a $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$ jsou reálná čísla. Pak zápisem $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$ rozumíme hodnotu řetězového zlomku

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

Souvislost mezi řetězovými zlomky a dobrými aproximacemi je dána následujícím tvrzením.

Tvrzení. Nechť

$$p_{-1} = 0, \qquad q_{-1} = 1,$$
$$p_0 = 1, \qquad q_0 = 0.$$

a p_i, q_i, $i \geq 1$ jsou dána předpisem ($\heartsuit$), kde a_i, $i \geq 0$ jsou reálná čísla a $a_1 \neq 0$ pro $i \geq 0$. Pak pro $i \geq 0$ platí

a)
$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = [a_0, a_1, \ldots, a_i],$$

b)
$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i = (-1)^i.$$

Důkaz. a) Postupujme indukcí. Pro $i = 0$ dostáváme $p_1 = a_0$, $q_1 = 1$ a tvrzení platí. Nechť platí pro všechna $j = 0, 1, 2, \ldots, i-1$. Zřejmě platí

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i] = [a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}, a'_{i-1}], \quad \text{kde } a'_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{a_i}.$$

Z indukčního předpokladu dostáváme

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}, a'_{i-1}] = \frac{p_{i-1}a'_{i-1} + p_{i-2}}{q_{i-1}a'_{i-1} + q_{i-2}} = \frac{p_{i-1}a_{i-1} + p_{i-1}/a_i + p_{i-2}}{q_{i-1}a_{i-1} + q_{i-1}/a_i + q_{i-2}} =$$
$$= \frac{p_i + p_{i-1}/a_i}{q_i + q_{i-1}/a_i} = \frac{p_i a_i + p_{i-1}}{q_i a_i + q_{i-1}} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}},$$

tedy

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i] = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}},$$

což jsme chtěli ukázat. b) Pro důkaz druhé části využijeme pozorování, že

$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i$$

je determinant matice

$$M_i = \begin{pmatrix} q_{i+1} & q_i \\ p_{i+1} & p_i \end{pmatrix}.$$

Přitom platí, že $|M_{-1}| = -1$ a

$$M_{i+1} = M_i \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení tedy plyne z pravidla o determinantu součinu. □

Dobré aproximace, řetězové zlomky a Eukleidův algoritmus. Řekneme, že řetězový zlomek $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ je *čistý*, pokud a_0 je celé číslo a a_i, $i \geq 1$ jsou kladná celá čísla. V případě, že je čistý řetězový zlomek konečný (v tom smyslu, že posloupnost (a_i) je konečná), požadujeme ještě, aby poslední člen byl větší než jedna. Tento poslední požadavek plyne z rovnosti

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, 1] = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i + 1].$$

Jinak řečeno, výraz

$$a_i + \frac{1}{1}$$

na konci řetězového zlomku zakážeme. Zlomky získané nějakým prefixem řetězového zlomku se nazývají jeho *konvergenty.* Protože posloupnost konvergentů odpovídá posloupnosti dobrých aproximací, má každé číslo zjevně jediné vyjádření pomocí čístého řetězového zlomku. To je ovšem vidět i přímo. Předpokládejme, že

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = [a'_0, a'_1, a'_2, \dots],$$

a nechť $a_i \neq a'_i$ je první číslo, ve kterém se zlomky liší. Označme

$$\varepsilon = [a_i, a_{i+1}, \dots] = a_i + \frac{1}{[a_{i+1}, a_{i+2}, \dots]},$$
$$\varepsilon' = [a'_i, a'_{i+1}, \dots] = a'_i + \frac{1}{[a'_{i+1}, a'_{i+2}, \dots]}.$$

Pak α můžeme vyjádřit pomocí dvou nečistých zlomků jako

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \varepsilon] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \varepsilon'].$$

Je snadno vidět, že tato rovnost implikuje $\varepsilon = \varepsilon'$. To ale neplatí, protože číslo a_i se liší od a'_i alespoň o jedničku, zatímco $1/[a_{i+1}, a_{i+2}, \dots]$ a $1/[a'_{i+1}, a'_{i+2}, \dots]$ jsou dvě kladná čísla ostře menší než jedna. Ostrost nerovnosti v předchozí větě je podmíněna zákazem, že řetězový zlomek nesmí končit jedničkou - bez něj by existovala výše uvedená dvojznačnost.

Mějme nyní nějaké číslo α, např. číslo π jako v úvodu. Viděli jsme, že jeho dobré aproximace jsou dány posloupností čísel a_0, přičemž tato čísla současně umožňují zapsat α jako řetězový zlomek. Jak ale tuto posloupnost a_i rychle najít? Čísla a_i se objevila jako

$$\left| \frac{q_{i+2} - q_{i+1}}{q_i} \right|,$$

můžeme je tedy odvodit ze znalosti dobrých aproximací. To je ale nešikovné. Čekali bychom spíše, že dobré aproximace najdeme pomocí znalosti posloupnosti a_i. Efektivní algoritmus pro konstrukci této posloupnosti poskytují právě řetězové zlomky. Označme

$$\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \dots,],$$

tedy $\alpha = \alpha_0$. Pak máme

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}},$$

kde $1/\alpha_{i+1}$ je ostře menší než jedna. To znamená, že platí

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\langle \alpha_i \rangle},$$

což je hledaný algoritmus.

Jedná se vlastně o (rozšířený) Eukleidův algoritmus, ve kterém hledáme „největšího společného dělitele"dvou reálných čísel. To odpovídá antickém problému souměřitelnosti, nebo nesouměřitelnosti dvou veličin, např. délek dvou úseček, ve kterém mají řetězové zlomky svůj původ. V případě π nás např. zajímá poměr obvodu kruhu, označme ho S, a průměru D. Zjistíme, že se průměr do obvodu vejde třikrát a ještě zbude délka Z. To je dělení se zbytkem z Eukleidova algoritmu:

$$P = 3D + Z.$$

V řeči poměru obou délek dostáváme naše

$$\pi = \frac{P}{D} = \left\lfloor \frac{P}{D} \right\rfloor + \frac{Z}{D}.$$

Dále je třeba zjistit, jaká část D zbylé Z je, tedy vyjádřit D/Z, a algoritmus pokračuje.

Následující podrobné srovnání ukazuje, že dobré aproximace odpovídají Bezoutovým koeficientům a jediný rozdíl je v odlišné práci se znaménky.

Řetězový rozvoj α jakožto Eukleidův algoritmus počítající $\mathrm{NSD}(c,d) = \mathrm{NSD}(\alpha,1)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} p_{-1} & = & \tilde{p}_{-1} & = & 0 & \quad q_{-1} & = & \tilde{q}_{-1} & = & 1 & \quad \beta_{-1} & = & c & = & \alpha \\ p_0 & = & \tilde{p}_0 & = & 1 & \quad q_0 & = & \tilde{q}_0 & = & 0 & \quad \beta_0 & = & d & = & 1 \end{array}$$

$$\alpha_i = \tfrac{\beta_{i-1}}{\beta_i}$$

$$\begin{array}{c|c} \beta_{i-1} = a_i\beta_i + \beta_{i+1} & \alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \\ \begin{array}{rcl} \tilde{p}_{i+1} & = & \tilde{p}_{i-1} - a_i\tilde{p}_i \\ \tilde{q}_{i+1} & = & \tilde{q}_{i-1} - a_i\tilde{q}_i \end{array} & \begin{array}{rcl} p_{i+1} & = & p_{i-1} + a_i p_i \\ q_{i+1} & = & q_{i-1} + a_i q_i \end{array} \\ \tilde{p}_i d + \tilde{q}_i c = \beta_i & p_i - q_i\alpha = (-1)^i\beta_i \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p_i & = & (-1)^i\tilde{p}_i \\ q_i & = & (-1)^{i+1}\tilde{q}_i \end{array}$$

Začátek řetězového zlomku pro π je $[3,7,15,1,292,1,1,1,\dots]$. Číslo 292 na pátém místě indikuje na začátku zmíněnou výbornou aproximaci zlomkem $[3,7,15,1] = {}^{355}/_{113}$. Napíšeme-li totiž

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1+\varepsilon}}}$$

je zaokrouhlovací chyba ε, které se dopouštíme v odhadu $[3,7,15,1]$, menší než ${}^1/_{292}$.

Algoritmus dělení intervalů se zbytkem je také dobře vidět v hledání dobrých aproximací jako rekordů hodnot $\|q\cdot\alpha\|$. Máme-li dva po sobě jdoucí rekordy $\|q_i\cdot\alpha\|$ a $\|q_{i+1}\cdot\alpha\|$, můžeme najít další rekord jako zbytek při dělení délky $\|q_i\cdot\alpha\|$ délkou $\|q_{i+1}\cdot\alpha\|$. Položíme-li tedy

$$a_{i+1} = \left\lfloor \frac{\|q_i\cdot\alpha\|}{\|q_{i+1}\cdot\alpha\|} \right\rfloor,$$

můžeme nalézt lepší aproximaci jako

$$\|q_{i+2}\cdot\alpha\| = \|q_i\cdot\alpha\| - a_{i+1}\,\|q_{i+1}\cdot\alpha\|\,.$$

Vzhledem ke střídání znamének odhadů dostáváme

$$p_{i+2} - q_{i+2}\cdot\alpha = p_i - q_i\cdot\alpha + a_{i+1}(p_{i+1} - q_{i+1}\cdot\alpha),$$

což je jiný způsob, jak názorně nahlédnout vztah

$$a_{i+1} = \frac{q_{i+2}-q_i}{q_{i+1}} = \frac{p_{i+2}-p_i}{p_{i+1}}.$$

Aplikace. Řetězové zlomky jsou, jak jsme viděli, účinným nástrojem pro racionální aproximaci iracionálních čísel. Důležité jsou ale i pro aproximaci čísel racionálních. Předpokládejme, že máme nepřesnou hodnotu nějakého zlomku, vzniklou např. zaokrouhlením nebo nepřesností měření. Příkladem takové situace je Shorův kvantový algoritmus pro faktorizaci. Chceme-li původní zlomek odhalit, použijeme řetězový rozvoj nepřesné hodnoty.

Příklad. Máme hodnotu $h = 0.15328$, o které víme, že je zaokrouhlením (s přesností na stotisíciny) nějakého podílu nejvýše osmibitových čísel. Řetězový rozvoj h je $[0, 6, 1, 1, 9, 1, 10]$ s konvergenty:

$$\left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{13}, \frac{19}{124}, \frac{21}{137}, \frac{229}{1494}, \frac{479}{3125}\right).$$

Ze zlomků se jmenovatelem i čitatelem nejvýše osmibitovými je pouze $^{21}/_{137}$ zaokrouhleno na stotisíciny rovno h.

zlomek	zaokrouhlení
$\frac{1}{6}$	0.16667
$\frac{1}{7}$	0.14286
$\frac{2}{13}$	0.15385
$\frac{19}{124}$	0.15323
$\frac{21}{137}$	0.15328

Vzniká samozřejmě otázka, jestli jsme nějaký zlomek se stejným zaokrouhlením v řetězovém rozvoji neminuli. Na to odpovídá následující tvrzení.

Tvrzení. Je-li

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q^2},$$

pak je zlomek $^p/_q$ konvergentem α.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že q je nesoudělné s p. Chceme ukázat, že je q dobrým jmenovatelem. Nechť to není pravda. Pak existuje nějaké $q' < q$ takové, že $\|q' \cdot \alpha\| \leq \|q \cdot \alpha\|$. Tedy pro nějaké p' platí

$$\left|\frac{p'}{q'} - \alpha\right| \leq \frac{q}{q'}\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2qq'},$$

odkud dostáváme

$$\left|\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\frac{p'}{q'} - \alpha\right| + \left|\frac{p'}{q'} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2qq'} + \frac{1}{2q^2} < \frac{1}{qq'}.$$

To je spor, protože

$$\left|\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|p'q - pq'|}{qq'} \geq \frac{1}{q'q}.$$

Ukázali jsme, že q je dobrým jmenovatelem. Protože $|p - q\alpha| \leq {}^1/_2$, je p zaokrouhlením $q\alpha$, a tedy (p, q) je dobrá aproximace a $^p/_q$ je konvergent α. □

V uvedeném příkladu je jmenovatel menší než 256 a zaokrouhlovací chyba je nejvýše $5 \cdot 10^{-6}$. Hledaný zlomek tedy musí být jedním z konvergentů, protože

$$5 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2 \cdot 256^2}.$$