## Odhad dávkové chyby

V této kapitole budeme pro přehlednost značení vynechávat symbol vektoru pro vstup v daném čase. Informace, kterou chceme přenést, tzv. *informační posloupnost*, je tedy $u_0, u_1, u_2, \dots$, kde $u_i \in \mathbb{F}^b$. Konvolučním kódovačem s poměrem $b/c$ ji zakódujeme do ***kódové posloupnosti*** $v_0, v_1, v_2, \dots,\ v_i \in \mathbb{F}^c$, kterou přeneseme kanálem se šumem a přijmeme posloupnost $r_0, r_1, r_2, \dots,\ r_i \in \mathbb{F}^c$. Tuto posloupnost Viterbiho algoritmem opravíme na předpokládanou (nejpravděpodobnější) kódovou zprávu $\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots,\ \widehat{v}_i \in \mathbb{F}^c$, kterou dekódujeme na předpokládanou informační zprávu $\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots,\ \widehat{u}_i \in \mathbb{F}^b$.

Pro daný konvoluční kódovač bychom nyní chtěli odhadnout pravděpodobnost chyby. Označme $P_b$ průměrnou pravděpodobnost, že symbol $u_i^{(j)} \in \mathbb{F}$ bude dekódován chybně. V binárním případě $\mathbb{F} = \{0,1\}$, na který se omezujeme, to můžeme psát jako $\widehat{u}_i^{(j)} = 1 - u_i^{(j)}$.

Chybové události konvolučního kódování se vždy dějí v *dávkách*, které odpovídají situaci, kdy Viterbiho algoritmus zvolí chybnou cestu mezi dvěma správnými stavy. Za jednu chybovou událost, *dávkovou chybu*, tedy pokládáme cestu mřížovím kódovače, která začíná a končí správným stavem, ale všechny vnitřní stavy jsou chybné.

Uvažujme dávkovou chybu $\widehat{C}$ délky $\ell$ jako kódovou posloupnost $\widehat{v}_{i+1}, \widehat{v}_{i+2}, \dots, \widehat{v}_{i+\ell}$, která se liší od kódové posloupnosti $C = v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+\ell}$ správné cesty. Protože začátek i konec dávkové chyby splývá se správnou cestou, existují dvě kódová slova, která se liší právě o rozdíl cest $C$ a $\widehat{C}$. Jinak řečeno, posloupnost

$$C - \widehat{C} = \widehat{v}_{i+1} - v_{i+1}, \widehat{v}_{i+2} - v_{i+2}, \dots, \widehat{v}_{i+\ell} - v_{i+\ell}$$

je kódovou posloupností (doplněná případně na obě strany nulami).

Nadále budeme pro jednoduchost uvažovat binární symetrický kanál s pravděpodobností chyby $\varepsilon$ a Viterbiho dekódování s tvrdým rozhodováním, tedy s metrikou odpovídající Hammingově vzdálenosti. Nechť se $C$ a $\widehat{C}$ liší na $d$ místech, tedy nechť $d$ je váha vektoru $C - \widehat{C}$. Vztah mezi Viterbiho metrikami cest $\widehat{C}$ a $C$, je dán hodnotami posloupnosti $r_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_{i+\ell}$ právě na těch místech, na kterých se kódové posloupnosti cest $C$ a $\widehat{C}$ liší. Metrika chybové cesty je větší, a tato cesta je tedy pravděpodobnější než cesta správná, právě když se v rámci těchto $d$ míst liší $r_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_{i+\ell}$ od $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+\ell}$ na více než $d/2$ místech. Pro přesně $d/2$ rozdílů jsou obě cesty rovnocenné a cesta $\widehat{C}$ je zvolena s pravděpodobností $1/2$ (předpokládejme, že nerozhodný výsledek řeší algoritmus takto). Pravděpodobnost toho, že algoritmus volící takto mezi $C$ a $\widehat{C}$ zvolí dávkovou chybu $\widehat{C}$ je

$$p_d = \begin{cases} \displaystyle\sum_{e=(d+1)/2}^{d} \binom{d}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{d-e}, & d \text{ liché},\\[2ex] \displaystyle\sum_{e=d/2+1}^{d} \binom{d}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{d-e} + \frac{1}{2}\binom{d}{d/2} \varepsilon^{d/2} (1-\varepsilon)^{d/2}, & d \text{ sudé}. \end{cases}$$

Hodnotu $p_d$ pro sudé $d = 2k$ lze vzhledem k $\varepsilon < (1-\varepsilon)$ odhadnout takto:

$$p_d < \sum_{e=k}^{2k} \binom{2k}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} < \sum_{e=k}^{2k} \binom{2k}{e} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k <$$

$$< \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k \sum_{e=0}^{2k} \binom{2k}{e} = \left(2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right)^d .$$

Přímým výpočtem lze navíc ukázat, že platí $p_{2k-1} = p_{2k}$:

$$\begin{aligned}
p_{2k-1} &= (1-\varepsilon)\cdot p_{2k-1} + \varepsilon \cdot p_{2k-1} = \\
&= \sum_{e=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} + \sum_{e=k+1}^{2k} \binom{2k-1}{e-1} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} = \\
&= \binom{2k-1}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k + \varepsilon^{2k} + \sum_{e=k+1}^{2k-1} \binom{2k}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} = \\
&= \frac{1}{2}\binom{2k}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^k + \sum_{e=k+1}^{2k} \binom{2k}{e} \varepsilon^e (1-\varepsilon)^{2k-e} = \\
&= p_{2k} .
\end{aligned}$$

Položíme-li tedy

$$z := 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} ,$$

dostáváme

$$p_{2k-1} = p_{2k} < z^{2k} .$$

Nyní můžeme odhadnout tzv. ***pravděpodobnost dávkové chyby***, označme ji $P_B$, tedy pravděpodobnost, že v daném časovém okamžiku Viterbiho algoritmus opustí správnou cestu. Výše jsme spočítali pravděpodobnost toho, že jedna konkrétní cesta $\widehat{C}$ je pravděpodobnější než cesta správná. Pravděpodobnost $P_B$ je jistě menší než součet pravděpodobností všech chybových cest, které v daném okamžiku mohou začínat. Protože takové cesty odpovídají kódovým slovům, je horní hranicí

$$\sum_{\substack{v \in \mathcal{C} \\ |v| < \infty}} p_{|v|} ,$$

kde $|v|$ označuje váhu slova $v$. (Nekonečná kódová slova neuvažujeme buď z definice nebo proto, že pravděpodobnost nekonečné chyby je nulová.) Je-li $T(W) = \sum n_d W^d$ generující posloupnost počtu vektorů s vahou $d$, dostáváme z nerovnosti $p_d < z^d$ odhad

$$P_B < T(z).$$

To lze s využitím vztahu $p_{2k-1} = p_{2k}$ zlepšit na

$$\begin{aligned}
P_B < \sum (n_{2k-1} + n_{2k}) z^{2k} &= \sum n_{2k} z^{2k} + \sum n_{2k-1} z^{2k} = \\
&= \frac{1}{2}\left(T(z) + T(-z)\right) + \frac{1}{2} z \left(T(z) - T(-z)\right) = \\
&= \frac{1+z}{2}\, T(z) + \frac{1-z}{2}\, T(-z).
\end{aligned}$$