Teorie Informace - text k přednášce

Štěpán Holub a Michal Kupsa

23. dubna 2024

1 Entropie jako cena informace

V běžném jazyce někdy říkáme, že jsme obdrželi spoustu informací, ale že byly všechny bezcenné. Taková formulace poukazuje na skryté rozlišení mezi zprávou a její informační hodnotou. Informační hodnotu zprávy lze přitom chápat jako příspěvek k naší schopnosti rozlišovat, identifikovat stav věcí. Bezcenná je zpráva, která nás informuje o něčem, co už víme, případně o něčem, co nijak nepřispívá k tomu, co vědět chceme (tak můžeme chápat zprávu nepřesnou či lživou, která nás sice informuje o stavu mysli našeho informátora, ale nikoli o stavu věcí, které nás zajímají). Malou informační hodnotu má zpráva očekávaná s velkou pravděpodobností, velkou naopak zpráva nečekaná a nepravděpodobná. Z toho je vidět, že pojem informace je spojen s náhodností a nejistotou a s mírou, s jakou se nejistota díky přijaté zprávě změní. Teorie informace je kvantitativní, matematické uchopení uvedených neformálních intuicí.

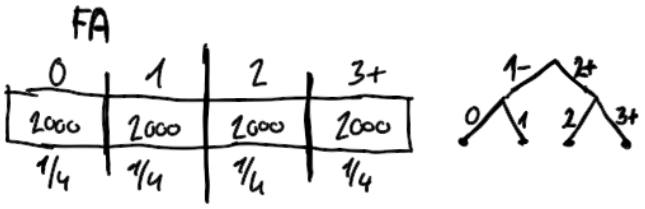
Začněme příkladem. Mějme nejmenovanou instituci, která má seznam 8000 lidí (říkejme jim souhrnně populace) a ráda by zjistila, kolik kreditních karet má každý z nich. Zadá tento důležitý úkol raději hned dvěma různým firmám.

Firma FA přinese seznam 8000 lidí, ve kterém jsou v kolonce počtu karet zapsány cifry 0,1,2 a 3+, kde 3+ znamená tři a více bez přesnějšího rozlišení. Počet lidí příslušející každé kategorii je 2000, viz Obrázek 1. Firma FB přinese stejný seznam, ve kterém je zapsáno 1-,2,3 a 4+, kde 1- znamená 1 nebo žádná, a 4+ znamená 4 a více. Počet lidí pro příslušné počty karet jsou po řadě 4000, 2000, 1000 a 1000. Viz Obrázek 2.

Otázka je, který seznam je z hlediska informační hodnoty kvalitnější. Toto samozřejmě souvisí s konkrétním využitím, ale zjednodušme si nyní situaci a měřme to pouze přes „náklady“ na získání informace v podobě počtu otázek. V zájmu rovných podmínek, uvažujme pouze otázky, na které se dá odpovědět ANO a NE. Kolik otázek musela položit první a druhá firma? Firma FA se mohla například ptát, zda má člověk 2 a více karet, a dle získané odpovědi následnou otázkou rozlišit 0 nebo 1, případně 2 a 3+. Tato strategie se dá popsat pomocí stromu otázek, případně pomocí posloupnosti „řezů“ populací, viz Obrázek 1b, kde pořadí řezů populací je indikován délkou svislé čáry (nejdelší je první).

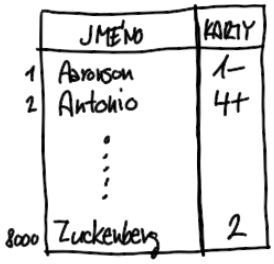
Tímto způsobem položí dohromady 16000 otázek, 2 otázky na člověka. Druhá firma může postupovat podobně, rozdělí si populaci první otázkou na dvě a dvě kategorie, a druhou otázkou se již dostane na jednu ze čtyř možností. Takto bude pokládat také 16000 otázek. Druhá firma má ale lepší možnost. Namísto strategie, která balancuje strom otázek z hlediska počtu možných odpovědí, může balancovat otázky z hlediska rozložení populace. Tento přístup vede k tomu, že první otázkou "1- vs 2+"rozdělí populaci napůl. V případě odpovědi 1- se už nemusí dále ptát, v druhém případě opět rozdělí příslušnou část populace napůl otázkou „2 vs 3+“. V případě odpovědi „3+“, je pak třeba položit ještě třetí otázku „3 vs 4+“, viz Obrázek 2b. Takto se sice stane, že budeme pokládat některým lidem tři otázky, ale celkem bude položeno jen $4000 + 2000 * 2 + 2000 * 3 = 14000$ otázek, v průměru $7/4$

(a) Seznam FA

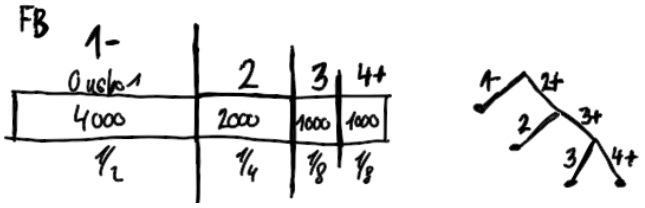


(b) Rozložení počtu kreditek, strom otázek

Obrázek 1: Průzkum dle firmy FA



(a) Seznam FB



(b) Rozložení počtu kreditek, strom otázek

Obrázek 2: Průzkum dle firmy FB

otázek na člověka. Firma FA tedy přinesla nákladnější informaci. Otázkou je, zda nákladnější znamená lepší.

Podívejme se nyní na věc pohledem klienta, neboli nejmenované instituce. Jak porovnat oba seznamy? Pokud by se jeden seznam dal zcela odvodit z druhého, jistě bychom prohlásili ten první za hodnotnější. To ovšem není tento případ, neboť seznamy se navzájem doplňují. Pokud je použijeme oba, jsme schopni u každého člověka říci, zda má 0,1,2,3 nebo 4+ kreditních karet. Takovéto spojení informací od obou firem do jednoho seznamu nabízí jiný způsob jak zjistit kvalitu informace. Konkrétně se můžeme ptát na dodatečné náklady, pokud by instituce chtěla doplnit seznam od firmy FA na sdruženou informaci. Firma FA by v takovém případě musela rozdělit kategorii 3+ na kategorie 3 a 4+. K tomu by stačilo položit $2000 * 1 = 2000$ otázek. Přepočteno na celkovou populaci to dává $1/4$ dodatečné otázky na člověka. Při doplňování seznamu od firmy FB na sdruženou informaci bychom potřebovali rozlišit kategorii $1-$ na kategorie 0 a 1. K tomu je třeba dodatečně položit $4000 * 1 = 4000$ otázek. V průměru 1/2 otázky na člověka (vztaženo k celé populaci). I z tohoto pohledu je tedy informace od firmy FA kvalitnější.

Dejme nyní tento příklad do souvislosti s matematickými pojmy. Populaci označíme Ω a seznamy od firem FA a FB budeme chápat jako funkce $X : \Omega \to A$ a $Y : \Omega \to B$, kde $A = \{0, 1, 2, 3+\}$ a $B = \{1-, 2, 3, 4+\}$. Na množině Ω dále uvažujme pravděpodobnost $\mathbb{P}$, která každému člověku přiřadí nějakou váhu, v našem případě všem stejnou. Tím se funkce X a Y stanou náhodnými veličinami v širším

slova smyslu. V teorii pravděpodobnosti se za náhodné veličiny standardně uvažují funkce z pravděpodobnostního prostoru do reálných čísel, což umožňuje správně definovat střední hodnotu, rozptyl atd. Pro teorii informace je přirozenější zabývat se zobrazeními do konečné, či spočetné množiny, kdy nepředpokládáme u možných hodnot žádnou další strukturu, či zavedené operace. Proto není problém, že je hodnotou například barva, typ vozu, či označení „3+“, jako v našem příkladě. Pro naše dvě náhodné veličiny pak definujeme entropii $\mathcal{H}(X)$ (resp. $\mathcal{H}(Y)$), sdruženou entropii $\mathcal{H}(X,Y)$ a podmíněnou entropii $\mathcal{H}(X|Y)$ (resp. $\mathcal{H}(Y|X)$) pomocí vzorců

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(X) &= -\sum_{a\in A} \mathbb{P}(X=a)\log \mathbb{P}(X=a),\\
\mathcal{H}(X,Y) &= -\sum_{a\in A,b\in B} \mathbb{P}(X=a,Y=b)\log \mathbb{P}(X=a,Y=b),\\
\mathcal{H}(X|Y) &= -\sum_{a\in A,b\in B} \mathbb{P}(X=a,Y=b)\log \mathbb{P}(X=a|Y=b),
\end{aligned}$$

kde nedefinované členy sum ($0\log 0, 0\log\frac{0}{0}$) ignorujeme, t.j. považujeme je za nulu. Základ logaritmu je fixní a obvykle ho volíme rovný 2. Jednoduchým výpočtem pak lze zjistit, že

$$\mathcal{H}(X)=2, \qquad \mathcal{H}(Y)=\frac{7}{4},$$
$$\mathcal{H}(X,Y)=\frac{9}{4}, \qquad \mathcal{H}(X|Y)=\frac{1}{2}, \qquad \mathcal{H}(Y|X)=\frac{1}{4}.$$

Veličiny $\mathcal{H}(X)$ a $\mathcal{H}(Y)$ číselně odpovídají průměrnému počtu otázek na člověk, které musí položit firma FA či FB. Platí dokonce, že ve vzorci průměrované hodnoty $-\log\mathbb{P}(X=a)$ odpovídají přesně počtu otázek položených člověku z kategorie „a“ v ideální strategii pro firmu FA, podobně $-\log\mathbb{P}(Y=b)$ odpovídá počtu otázek pro člověka z kategorie „b“ při ideální strategii pro firmu FB. Podobně, $-\log\mathbb{P}(X=a\mid Y=b)$ zde odpovídá počtu dodatečných otázek pro člověka z kategorie a, víme-li od firmy FB, že člověk patří do kategorie „b“, z čehož pak plyne, že $\mathcal{H}(X|Y)$ je rovno průměrnému počtu doplňujících otázek na člověka při znalosti seznamu od firmy FB.

Entropii se tedy dá rozumět jako průměrné kvantitě informace, kterou získáme, jsme-li schopni rozdělit jednolitou populaci do určitých skupin, například dle počtu kreditních karet. Jde tedy o kvantifikaci naší schopnosti rozlišovat. podobně se dá interpretovat sdružená entropie, kde rozlišujeme do jemnějších kategorií. Podmíněná entropie $\mathcal{H}(X|Y)$ pak je kvantifikace schopnosti rozlišit v populaci kategorie veličiny X, pokud už umíme rozlišovat do kategorií veličiny Y.

Na závěr ještě zmiňme, že rovnost průměrného počtu otázek v různých scénářích s příslušnou entropií bývá v obecném případě jen přibližná. Takto pěkně příklad vyšel díky tomu, že všechny uvažované pravděpodobnosti, včetně těch podmíněných, byly celočíselnými mocninami čísla, které jsme zvolili jako základ pro logaritmus ve vzorcích pro entropii.

2 Pravděpodobnostní prostor a náhodné veličiny

V těchto přednáškách budeme používat následující standardní definici pravděpodobnostního prostoru, pravděpodobnostní míry a náhodné veličiny.

Měřitelný prostor je dvojice $(\Omega, \mathcal{F})$, kde Ω je množina a $\mathcal{F}$ je **σ-algebra**. Pojem σ-algebry je vymezen požadavky, aby $\mathcal{F}$ obsahovala celé Ω a byla uzavřena na spočetná sjednocení a komplement, tj.

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $V \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus V \in \mathcal{F}$
- $V_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \mathcal{F}$.

Podmnožiny Ω ležící v $\mathcal{F}$ se nazývají **měřitelné**. Z pravidel pro σ-algebru vyplývá také to, že $\mathcal{F}$ je uzavřená na spočetné průniky, konečná sjednocení a průniky a že obsahuje prázdnou množinu. Termín „měřitelný“ už sám naznačuje, že se na systému $\mathcal{F}$ chystáme zavést míru. V našem případě to bude navíc vždy míra pravděpodobnostní. **Pravděpodobnostní míra** $\mathbb{P}$ je zobrazení z $\mathcal{F}$ do intervalu $[0, 1]$, které splňuje:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (σ**-aditivita**) je-li $V_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$, systém vzájemně disjunktních množin, pak

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in M} V_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(V_i\right).$$

Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazýváme **pravděpodobnostní prostor**.

Platí, že i pravděpodobnost *konečného* sjednocení vzájemně disjunktních množin je součtem pravděpodobností; v definici σ-aditivity stačí zvolit všechny množiny až na konečný počet prázdné a všimnout si, že pravděpodobnost prázdné množiny je nula.

Je-li $(A, \mathcal{F}')$ měřitelný prostor a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor, pak **náhodná veličina** X je **měřitelné zobrazení** $X : \Omega \to A$, přičemž měřitelným nazýváme takové zobrazení, pro které je *vzor* každé měřitelné množiny měřitelný. Řekneme, že náhodná veličina je **konečná**, pokud je A konečná; **diskrétní**, pokud je A nejvýše spočetná; a **reálná**, pokud $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definice náhodné veličiny vyžaduje, aby A byla množina s mírou, nebo aby na ní byl alespoň definován systém měřitelných množin. V případě konečných a diskrétních náhodných veličin můžeme (a bez výjimky budeme) předpokládat, že měřitelné jsou všechny podmnožiny A, tedy měřitelný systém $\mathcal{F}'$ je celá potenční množina množiny A, pro kterou zavedeme symbol 2^A.

Poznámka: Symbolem B^A značíme obvykle množinu $\{f \mid f : A \to B\}$ funkcí z A do B, což odpovídá představě, že taková funkce je „A-tic prvků z B“, jako je např. naše p výše šesticí reálných čísel. Podmnožinu $Y \subseteq A$ můžeme současně identifikovat s její charakteristickou funkcí $\chi_Y : A \to \{0, 1\}$ indikující, které prvky v Y leží, a které ne (pokud nulu a jedničku chápeme jako booleovské hodnoty „pravda“ „nepravda“, jedná se o predikát „leží v A“). Zbývá použít množinové kódování čísla 2 právě jako $\{0, 1\}$.

Touto notací si ušetříme symbol $\mathcal{P}$. Různých „p“ je v pravděpodobnosti už víc než dost.

U reálných náhodných veličin budeme za $\mathcal{F}'$ brát systém Borelovských množin $\mathcal{B}$, tedy nejmenší σ-algebru, která obsahuje intervaly. Borelovské množiny zejména obsahují všechny jednoprvkové množiny.

Pro danou náhodnou veličinu $X : \Omega \to A$ definujme zobrazení $P_X : \mathcal{F}' \to \mathbb{R}$ předpisem

$$P_X(V) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(V)\right).$$

Důležitým pozorováním je, že P_X je pravděpodobnostní míra na $(A, \mathcal{F}')$ indukovaná náhodnou veličinou X. Máme tedy nový pravděpodobnostní prostor $\left(A, \mathcal{F}', P_X\right)$. Tomuto zobrazení říkáme **rozdělení náhodné veličiny** X.

Pro diskrétní veličiny navíc definujeme navíc $P_X(a) := P_X(\{a\})$, čímž dostáváme zobrazení $P_X : A \to \mathbb{R}$, což je reálná náhodná veličina právě na pravděpodobnostním prostoru $\left(A, \mathcal{F}', P_X\right)$. Tomuto zobrazení budeme rovněž říkat **rozdělení náhodné veličiny** X.

Poznámka: Jedná se o typické „zneužití terminologie“: symbol P_X a pojem *rozdělení náhodné veličiny* mají nyní dva významy podle toho, jestli je argumentem prvek, nebo podmnožina A. Přestože např. tvrzení, že P_X je náhodná veličina na prostoru $\left(A, 2^A, P_X\right)$ může být na první pohled matoucí, málokdo by nakonec v této situaci volal po zavedení nového symbolu a nového termínu.

V programovacích jazycích se takový postup nazývá „function overloading“. I fakt, že to řada jazyků podporuje, ukazuje, že nedorozumění při dostatečné míře pozornosti nehrozí.

Oba významy pojmu rozdělení náhodné veličiny jsou ovšem úzce svázány, protože rozdělení definované na prvcích pomocí aditivity definuje rozdělení definované na podmnožinách.

Poznámka: Pro spočetné diskrétní veličiny to s sebou nese problematiku konvergence řad, která je ovšem v případě pravděpodobnostního prostoru triviální, protože sčítáme nezáporné hodnoty a součet je shora omezen jedničkou, takže všechny součty existují, jsou to limity rostoucí omezené posloupnosti částečných součtů.

Tento postup naopak nedává dobrý smysl ve spojitém případě $A = \mathbb{R}$, kdy obvykle platí $P_X(a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ (viz níže úvahu o nekonečných

posloupnostech nezávislých hodů mincí). V takovém případě se rozdělením náhodné veličiny rozumí pouze první význam P_X, tedy funkce $P_X : \mathcal{F}' \to \mathbb{R}$. Roli podobnou našemu rozdělení diskrétní náhodné veličiny $P_X : A \to \mathbb{R}$ plní *distribuční funkce*, definovaná pro $a \in \mathbb{R}$ jako $\mathbb{P}\left(X^{-1}(-\infty, a]\right)$. Tato funkce určuje míru vzorů pro intervaly (a, b), a tedy i pro systém Borelovských množin, který je ve spojitém případě naší volbou pro $\mathcal{F}'$.

Bude také často vhodné chápat nejvýše spočetnou množinu A jako pravděpodobnostní prostor $\left(A, 2^A, P\right)$, kde pravděpodobnostní míra P není nutně indukovaná nějakou náhodnou veličinou. Taková míra je opět ekvivalentní zobrazení $P : A \to [0, 1]$ splňujícímu

$$\sum_{a \in A} P(a) = 1,$$

které budeme nazývat **(diskrétní) rozdělení na** A. Množinu všech takových rozdělení budeme značit Δ_A.

O tvrzeních, která platí všude až na množinu míry nula, řekneme, že platí **skoro jistě** ($\mathbb{P}$-skoro jistě), což budeme zkracovat na s.j. a psát v případě potřeby nad znak rovnosti nebo za tvrzení. Pokud tedy např. řekneme, že dvě množiny $M, N \in \mathcal{F}$ jsou si rovny skoro jistě ($\mathbb{P}$-skoro jistě), zapsáno $M = N$ s.j. , znamená to, že jejich symetrická diference $M \triangle N$ má míru nula. Zároveň dovolíme, aby náhodné veličiny byly definované „skoro jistě“, tedy aby jejich definice byla korektní na množině s pravděpodobností 1. Všimněte si, že i takto definované veličiny mají např. dobře definovanou střední hodnotu v tom smyslu, že její hodnota nezáleží na případném dodefinovaní.

Abychom mohli mmožiny s nulovou mírou (nemožné jevy) výslovně ignorovat, zavedeme pro libovolné rozdělení P (na nejvýše spočetné množině A) pojem **nosiče rozdělení**:

$$s(P) = \{a \in A \mid P(a) > 0\}.$$

Definujeme také **nosič diskrétní náhodné veličiny** X jako

$$s(X) = \{\omega \in \Omega \mid P_X(X(\omega)) > 0\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in s\left(P_X\right)\}.$$

V obou případech dostáváme ze σ-aditivity míry vztahy

$$P(s(P)) = 1 \quad \text{a} \quad \mathbb{P}\left(s\left(P_X\right)\right) = \mathbb{P}(s(X)) = 1.$$

(Připomeňme si znovu, že takto jednoduchý přístup k nosiči není možný pro spojité veličiny, u kterých by podobně definovaný nosič mohl být i prázdný.)

Pro obor hodnot A náhodné veličiny X často uvažujeme nějaké další ohodnocení $f : A \to \mathbb{R}$ (případně $f : s\left(P_X\right) \to \mathbb{R}$), a to zejména (ale nejen) pokud veličina X není reálná. Je f měřitelné zobrazení (tedy zejména pokud je X diskrétní), je takto definována nová, reálná náhodná veličina $f \circ X$. Střední hodnota této reálné veličiny pak splňuje vztah

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot f(a).$$

Připomeňme, že v klasické teorii pravděpodobnosti má konečná reálná náhodná veličina $Y : \Omega \to B \subset \mathbb{R}$, kde B je konečná množina, střední hodnotu definovanou vztahem

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{b \in B} P_Y(b) \cdot b = \sum_{b \in s(P_Y)} P_Y(b) \cdot b.$$

Tento základní vzorec se pak v případě konečné náhodné veličiny $Y = f(X)$ liší od vztahu uvedeného výše pouze seskupením sčítanců dle jádra zobrazení f a ignorováním nulových členů sumy(zkuste si rozmyslet).

V dalším textu budeme využívat také následující vlastnosti střední hodnoty, které lze odvodit z výše uvedených vztahů. Pro konečné reálné náhodné veličiny X a Y a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

- $X \overset{\text{s.j.}}{=} Y$, pak $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
- $X \leq Y$ s.j. , pak $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- $X \leq Y$ s.j. a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, pak $X \overset{\text{s.j.}}{=} Y$.
- $\mathbb{E}(\alpha X + Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
- $Y = X$ s.j. , pak $f(X) = f(Y)$ s.j. a $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ pro libovolnou měřitelnou funkci f.

> **Poznámka:** Uvedené vztahy platí pro libovolné reálné, nejen pro konečné, náhodné veličiny. Pro obecné reálné veličiny je však třeba použít teorii míry.

Všimněme si, že střední hodnota je vlastností rozdělení X a lze ji také chápat jako střední hodnotu náhodné veličiny f na pravděpodobnostním prostoru $\left(A, 2^A, P_X\right)$. Dává tedy smysl mluvit o střední hodnotě $\mathbb{E}_P(f)$ funkce $f : A \to \mathbb{R}$ i pro obecné rozdělení P na množině A. Hodnoty $P(a)$ jsou **váhy** prvků množiny A a střední hodnota

$$\mathbb{E}_P(f) = \sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot f(a),$$

je **vážený průměr**, resp. **konvexní kombinace** jejích hodnot. Tyto dva pojmy jsou pro nás synonymy.

> **Poznámka:** Kromě váženého průměru (konvexní kombinace) reálných čísel, budeme v další kapitole uvažovat také vážený průměr souboru rozdělení, které bude opět rozdělením na dané konečné množině.

*

V těchto přednáškách budeme téměř výhradně pracovat s konečnými veličinami. Základní vlastnosti teorie informace jsou totiž nejlépe viditelné na takových veličinách a byly pro ně zavedeny. Možné rozšíření na spojité (nebo spočetné) veličiny proto pouze přináší komplikace, které výkladu nijak nepomáhají. Z toho také plyne, že nebudeme potřebovat téměř žádné netriviální poznatky z teorie míry. Pokusme se nyní vysvětlit, proč jsou přesto výše uvedené definice používající jazyk teorie míry vhodné, či dokonce nutné. Bude to tedy připomínka toho, jak matematika přistupuje k pojmu pravděpodobnosti a proč.

Uvažujme hod (ne nutně férovou) kostkou, jejíž stěny jsou popsány písmeny a, b, c, d, e, f. Chování kostky je jednoduše definováno šesticí pravděpodobností $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ pro jednotlivé výsledky, což je prostě šestice nezáporných reálných čísel se součtem jedna. Pokud p chápeme jako zobrazení

$$p : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{R},$$

což je přirozený pohled pro jakékoli indexování, dostáváme pravděpodobnostní prostor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

na němž je zobrazení p rozdělením, které definuje míru na celém 2^Ω předpisem

$$\mathbb{P}(\{n\}) = p(n).$$

Náhodnou veličinu popisující hod kostkou nyní definujeme jako zobrazení (bijekci)

$$X : \Omega \to \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Pravděpodobnost, že na kostce padne např. c, pak je mírou vzoru jednoprvkové množiny $\{c\}$, formálně

$$\mathbb{P}(X = c) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{c\})\right) = \mathbb{P}(\{3\}) = p(3),$$

kde $\mathbb{P}(X = c)$ je pouhá notační konvence odpovídající neformálnímu „pravděpodobnost, že X je rovno c“. Všimněme si, že pokud by pravděpodobnost byla definována na prvcích Ω, nebylo by možné definovat např. „pravděpodobnost, že hodnota X je samohláska“, což je $\mathbb{P}(\{1, 5\})$. Z aditivity pak dostáváme

$$\mathbb{P}(\{1, 5\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{5\}) = p_1 + p_5,$$

aniž bychom museli pravděpodobnost uvažované události „padla samohláska“ zvlášť definovat. To také vede k tomu, že za **jevy** označujeme (měřitelné) podmnožiny Ω. Poněkud neintuitivně je tedy v našem případě jevem „padla samohláska“ množina $\{1, 5\}$, tedy $X^{-1}(\{a, e\})$, nikoli samo $\{a, e\}$. To je obvyklým zdrojem zmatku, zejména pro začátečníky, a také proto, že se tento formální přístup velmi často nedodržuje a zavádějí se různé konvence podobné námi výše zavedenému $\mathbb{P}(X = c)$.

Jednoprvkové podmnožiny Ω, budeme nazývat **elementárními jevy**, ale jen tehdy, *jsou-li měřitelné*. Poměrně častá konvence označující za elementární jevy *prvky* Ω je terminologicky nešťastná. O prvcích Ω budeme raději mluvit jako o **stavech**, a o Ω pak jako o **stavovém prostoru**.

*

Nejasným zůstává, proč jsme u naší kostky zavedli nové indexy $\{1,2,3,4,5,6\}$ a nepsali raději p_a, p_b, p_c, p_d, p_e, p_f, což by opět byly zkratky pro $\mathbb{P}(\{a\})$ atd. Za stavový prostor bychom tak uvažovali přímo množinu $\{a,b,c,d,e,f\}$. Jevem např. „X je samohláska“ by pak v souladu s intuicí byla množina $\{a,e\}$. Takový naivní přístup je možný, a přesně odpovídá tomu, že místo pravděpodobnostního prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ pracujeme s prostorem $(A,2^A,P)$, kde $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ a P je míra daná hodnotami p_a, p_b, p_c, p_d, p_e, p_f, což je rozdělení na A.

Výhoda oddělení stavového prostoru od množiny hodnot se nicméně výrazně projeví, když začneme uvažovat více náhodných veličin. Uvažme např. vedle výše definovaného hodu kostkou ještě hod (opět ne nutně férovou) mincí s hodnotami $\{\texttt{panna},\texttt{orel}\}$ s příslušnými pravděpodobnostmi $p_{\texttt{p}}$ a $p_{\texttt{o}}$. V běžném uvažování bez velké diskuse předpokládáme, že je možné obě veličiny kombinovat a mluvit např. o pravděpodobnosti jevu „na kostce padlo b a na minci `orel`“. To ale znamená, že uvažujeme novou náhodnou veličinu s hodnotami v množině $\{a,b,c,d,e,f\}\times\{\texttt{panna},\texttt{orel}\}$. Pokud bychom neměli společný stavový prostor, musíme zavést novou pravděpodobnostní míru. Stavový prostor i míra se tak budou neustále měnit v závislosti na uvažovaných veličinách. V novém prostoru náhle nebude zcela zřejmé ani to, co míníme jevem, že na kostce padlo b, resp. jaký je vlastně mezi jednotlivými prostory vztah. Budeme muse ztotožnit staré $\{b\}$ s novým $\{(b,\texttt{panna}),(b,\texttt{orel}))\}$ apod. Výhody jednoho společného stavového prostoru, na němž jsou definovány všechny uvažované náhodné veličiny způsobem popsaným výše, se stávají zřejmými. Odpovídá to představě jednoho světa, jehož *stav* ω kompletně určuje hodnoty všech náhodných veličin. Je-li příslušná jednoprvková množina $\{\omega\}$ měřitelná, můžeme ji chápat jako jev, který plně charakterizuje stav světa.

Soubory více náhodných veličin definují nové náhodné veličiny, kterým říkáme **náhodné vektory** nebo **sdružené náhodné veličiny**. Jsou-li X_i, $i\in I$, náhodné veličiny s obory hodnot A_i, definují náhodný vektor $X_I := (X_i)_{i\in I}$, což je zobrazení z Ω do kartézského součinu množin A_i, dané předpisem

$$X_I(\omega) = \big(X_i(\omega)\big)_{i\in I}\ .$$

Není však jasné, zda můžeme toto zobrazení nějak přirozeně chápat jako náhodnou veličinu. K tomu je totiž potřeba definovat na kartézském součinu množin A_i nějakou σ-algebru měřitelných množin. To je vždy možné, ale v obecném případě to předpokládá pokročilejší úvahy z teorie míry. Nás bude nicméně zajímat jednoduchý případ (konečných) vektorů

$$X_{[0..n)} := \big(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\big)\,,$$

kde všechna X_i jsou diskrétní náhodné veličiny. Pak bude i náhodný vektor diskrétní, a budeme se tedy moci držet našeho předpokladu, že jsou měřitelné všechny podmnožiny oboru hodnot. I přesto se však bez dostatečně bohatého pravděpodobnostního prostoru neobejdeme, pokud chceme uvažovat *neomezený* počet různých náhodných veličin, což bude případ studia náhodných procesů. Stačí uvážit neomezený počet nezávislých hodů mincí. Uvažme např. spočetně mnoho nezávislých hodů férovou mincí, tedy nezávislé binární uniformní náhodné veličiny, které označme X_i, $i \in \mathbb{N}$. Všimněme si, že každé $\omega \in \Omega$ definuje nekonečnou posloupnot z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Tím je definováno zobrazení $X_{\mathbb{N}} : \Omega \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, které je limitou vektorů $X_{[0..n)}$. Protože měřitelné množiny tvoří σ-algebru, je pro každou nekonečnou posloupnost $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ množina

$$M_s := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}_{[0..n)}\left(s_{[0..n)}\right) = X^{-1}_{\mathbb{N}}(\{s\})$$

měřitelná, jsouc spočetným průnikem měřitelných množin. Z předpokladu nezávislosti X_i plyne, že

$$\mathbb{P}\left(X^{-1}_{[0..n)}\left(s_{[0..n)}\right)\right) = 2^{-n},$$

a tedy M_s má míru nula. Pro mnoho s může být M_s prázdné, nicméně soubor neprázdných M_s

$$\left\{M_s \mid s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, M_s \neq \emptyset\right\}$$

je disjunktním rozkladem Ω na měřitelné množiny míry nula. Ze σ-aditivity míry plyne, že tento rozklad, a tedy ani Ω, nemohou být spočetné. Potřebujeme tedy nespočetně velký stavový prostor, v němž má každý elementární jev (tedy výše zmíněný úplný popis světa) nulovou pravděpodobnost.

Zobrazení $X_{\mathbb{N}}$ můžeme samo považovat za náhodnou veličinou, čímž se ovšem dostáváme na pole spojitých náhodných veličin, čemuž jsme se chtěli vyhnout. V těchto úvahách se tak ukazuje význam slova „téměř“ ve slibu, že se budeme zabývat pouze konečnými veličinami. Pokud totiž chceme takových konečných veličin uvažovat neomezeně mnoho, spojité veličiny se budou stále vznášet na pozadí jako limitní případy. Přesto platí, že v našich přednáškách budeme mluvit výhradně o konečných náhodných vektorech s konečně mnoha hodnotami. Otázky měřitelnosti tedy nebudou hrát v našich úvahách žádnou roli a můžeme (jak je v teorii pravděpodobnosti zvykem) předpokládat, že všechny uvažované veličiny a množiny jsou měřitelné.

*

Každá náhodná veličina $X : \Omega \to A$ indukuje disjunktní **rozklad** stavového prostoru Ω na množiny $X^{-1}(\{a\})$, $a \in A$, na měřitelné podmnožiny. Naopak, každý nejvýše spočetný rozklad $\mathcal{R}$ prostoru Ω na měřitelné podmnožiny definuje diskrétní náhodnou veličinu R: stačí zvolit pro každou množinu v rozkladu nějaké jméno a stavu ω přiřadit jméno množiny, ve které leží. Tímto jménem může být i množina

sama, v takovém případě mluvíme o **přirozené projekci**, kterou můžeme zapsat jako

$$\pi : \omega \mapsto [\omega]_R.$$

Z definic plyne,že $[\omega]_\mathcal{R} = R^{-1}(R(\omega))$ a platí $\mathbb{P}\left([\omega]_\mathcal{R}\right) = P_R(R(\omega))$. Díky předpokladu, že rozklad byl nejvýše spočetný, je zobrazení R měřitelné. Pro danou diskrétní náhodnou veličinu X nás často bude zajímat pouze rozklad, který indukuje, a obor hodnot pak můžeme podle libosti přejmenovávat.

> **Poznámka:** Disjunktní rozklad definičního oboru přirozeně indukuje každé zobrazení (nejen náhodná veličina). Ekvivalence $\omega \sim \omega'$ definovaná vztahem $X(\omega) = X(\omega')$ se v algebře nazývá *jádro zobrazení*. V případě homomorfismu se jedná o kongruenci a faktorizací podle této kongruence dostáváme strukturu $\Omega/_\sim$, která je podle věty o isomorfismu isomorfní oboru hodnot.
>
> Poznamenejme také, že v lineární algebře nebo v teorii grup se jako „jádro zobrazení“ obvykle označuje jedna význačná ekvivalenční třída, totiž ta odpovídající neutrálnímu prvku. Tato konvence je přirozená v tom smyslu, že tato význačná třída celou ekvivalenci, tedy *jádro zobrazení* v obecnějším smyslu, přímočaře určuje.

Jak už bylo řečeno, vektor diskrétních náhodných veličin $X_{[0..n)}$, kde $X_i : \Omega \to A_i$ je sám novou diskrétní náhodnou veličinou definovanou na kartézském součinu množin A_i. Její rozdělení

$$P_{X_{[0..n)}}(a_1, a_2, ..., a_n) = \mathbb{P}\left(\{\omega \mid X_i(\omega) = a_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}\right)$$

se nazývá **sdružené rozdělení** a jednoznačně určuje rozdělení jednotlivých složek, kterým se říká **marginální rozdělení**. Z aditivity míry totiž dostáváme

$$P_{X_k}(b) = \mathbb{P}\left(X_k = b\right) = \sum_{a_i \in s(A_i),\, i \neq k} \mathbb{P}\left(X_k = b_k, X_i = a_i, i \neq k\right),$$

protože množina všech stavů ω, pro které $X_k = b$, se rozpadá na disjunktní podmnožiny určené hodnotami $X_i(\omega)$ pro $i \neq k$. Takovým součtům se někdy říká *věta o celkové pravděpodobnosti* a v jejich pozadí je fakt, že rozklad Ω definovaný náhodným vektorem je zjemněním rozkladů definovaných jeho složkami.

Budeme-li pracovat s vektory délky dva, budeme obvykle psát (X, Y), namísto (X_0, X_1). Všimněme si také, že pokud označíme $X = X_{[0..n-1)}$ a $Y = X_{n-1}$, můžeme náhodný vektor $X_{[0..n)}$ chápat jako dvojici (X, Y) a podobně pro jiná seskupení náhodného vektoru.

Náhodné veličiny $X_0, X_2, ..., X_{n-1}$ jsou **nezávislé**, právě když

$$P_{X_{[0..n)}}(a_1, a_2, ..., a_n) = P_{X_0}(a_0) P_{X_1}(a_1) \cdots P_{X_{n-1}}(a_{n-1})$$

pro všechna $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Kontrolní otázky

1. Co je definičním oborem a oborem hodnot zobrazení $\mathbb{P}$, kterému říkáme pravděpodobnost?
2. V jakém vztahu jsou prvky množiny $\mathcal{F}$ k množině Ω, neboli o jakých (matematických) objektech má smysl říct, že mají pravděpodobnost?
3. Ujasněte si, že z definice σ-algebry skutečně vyplývá, že je $\mathcal{F}$ uzavřená na spočetné průniky, konečná sjednocení a průniky a že obsahuje prázdnou množinu.
4. Musí být množina, která má nulovou pravděpodobnost, prázdná?
5. Jak je na reálných náhodných veličinách a na rozděleních definováno sčítání a násobení reálným číslem?
6. Ověřte, že náhodné veličiny jsou uzavřeny na vážené průměry.
7. Ověřte, že rozdělení jsou uzavřena na vážené průměry.
8. Má množina, která neleží v $\mathcal{F}$, nulovou pravděpodobnost?
9. Zjistěte a formálně přesně dokažte, čemu se rovná π^{-1}, kde π je přirozená projekce.
10. Ověřte $[\omega]_{\mathcal{R}} = R^{-1}(R(\omega))$ a $\mathbb{P}\left([\omega]_R\right) = P_R(R(\omega))$.

3 Informace a entropie náhodných veličin

Nadále se budeme zabývat pouze konečnými náhodnými veličinami. Míra informace je definována **informačním obsahem** náhodného jevu:

Definice 3.1. ***Informační obsah*** *náhodného jevu $U \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(U) > 0$, je*

$$\mathfrak{I}(U) = -\log \mathbb{P}(U).$$

Logaritmus v definici je dvojkový, což je v teorii informace nejobvyklejší volba, ačkoli by bylo možné uvažovat i jiné základy. Entropie je bezrozměrná veličina, ale (v případě dvojkového logaritmu) se obvykle používá jako jednotka **bit**, což je zkratka pro „binary digit“, kterou začal systematicky používat Claude Shannon. Jev, který má pravděpodobnost $1/2$ má tedy informační obsah jeden bit. To odpovídá informačnímu obsahu jedné binární cifry, ovšem *pouze tehdy*, jsou-li obě cifry *stejně pravděpodobné*. Z tohoto hlediska je také jasné, proč se v definici objevuje (dvojkový) logaritmu Daná posloupnost n cifer má *při rovnoměrném rozdělení* pravděpodobnost 2^{-n}, a informační obsah jevu, který taková posloupnost představuje, je tedy v souladu s očekáváním n bitů. Informační obsah charakterizuje, kolik binárních cifer je třeba ke specifikaci daného jevu. Pokud jev např. pokrývá jednu osminu stavového prostoru, je osm rovnocenných kandidátů na hodnotu jevu a je potřeba tří binárních cifer pro sdělení informace, že daný jev nastal. To je ovšem jen neformální intuice. Není např. jasné, jak interpretovat situaci, kdy dvojkový logaritmus není celé číslo, např. v případě jedné třetiny. Většina výsledků v teorii informace je nicméně potvrzením, že výchozí intuice funguje velmi dobře.

Informační obsah může nabývat libovolných nezáporných hodnot (jistý jev má nulový informační obsah) a není definován pro množiny nulové míry. V literatuře je v takovém případě často dodefinován jako $+\infty$. My tento přístup následovat nebudeme.

Klíčovým pojmem teorie informace je **entropie náhodné veličiny**, což je její *průměrný informační obsah*. Tuto průměrnou hodnotu můžeme nahlížet dvěma ekvivalentními způsoby. První, názornější, definuje entropii pomocí jejího rozdělení:

Definice 3.2. ***Entropie rozdělení*** $P : A \to [0,1]$ *je*

$$\mathcal{H}(P) := \sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot \big(-\log P_X(a)\big).$$

Entropie ***náhodné veličiny*** *je entropie jejího rozdělení*

$$\mathcal{H}(X) := \mathcal{H}\left(P_X\right) = \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot \big(-\log P_X(a)\big).$$

Pro konečnou náhodnou veličinu je entropie kladné reálné číslo. Pokud je $s(P_X)$ spočetné, je suma stále definovaná, ale entropie může být nekonečná. V literatuře, kde

se dodefinovává informační obsah nemožného jevu, se běžně setkáte se zjednodušeným zápisem

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{a \in A} P_X(a) \cdot \left(-\log P_X(a)\right)$$

doplněným konvencí, že $0 \cdot (-\log \infty)$ je rovno nule. Hodnota na množině míry nula se tedy dodefinuje, aby se poté ignorovala. To je přístup, kterému se, jak jsme řekli, vyhneme.

Entropie je podle definice vážený průměr funkce $-\log \circ P_X$ na množině A. Tato funkce zjevně úzce souvisí s informačním obsahem, konkrétně s informačním obsahem jevů „$X = a$“. Chceme-li přenést definici entropie do základního stavového prostoru Ω, musíme definovat informační obsah daného stavu ω, jako informační obsah ekvivalenční třídy ω v rozkladu definovaném veličinou X:

Definice 3.3. ***Informační obsah náhodné veličiny*** $X : \Omega \to A$ *je náhodná veličina* $\mathfrak{I}_X : \Omega \to [0, \infty)$ *daná předpisem*

$$\mathfrak{I}_X(\omega) = -\log P_X(X(\omega)), \quad \omega \in s(X).$$

Informační obsah náhodné veličiny X je tedy definován skoro jistě a je složením zobrazení

$$\mathfrak{I}_X : \Omega \xrightarrow{X} A \xrightarrow{P_X} [0,1] \xrightarrow{-\log} [0, \infty).$$

Přímo z definic nyní za použití vztahu pro střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny plyne

$$\mathcal{H}(X) = \mathbb{E}\left(\mathfrak{I}_X\right),$$

což ospravedlňuje naše tvrzení, že entropie je průměrný informační obsah veličiny X.

Je důležité si všimnout, že entropie diskrétní náhodné veličiny je pouze vlastností rozdělení, a to navíc bez ohledu na přejmenování prvků množiny A. Je to tedy vlastnost souboru (multimnožiny) pravděpodobností, jejichž součet je jedna.

> **Poznámka:** Definici 3.2 lze opět číst také jako střední hodnotu funkce $-\log \circ P_X$ chápané jako náhodná veličina na pravděpodobnostním prostoru $(A, 2^A, P_X)$. Hodnotu $-\log P_X(a)$ lze zároveň chápat jako informační obsah jednoprvkové množiny $\{a\}$ podle Definice 3.1, ve které místo prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uvažujeme právě $(A, 2^A, P_X)$. Pokud bychom tedy označili $-\log \circ P_X$ např. jako $\mathfrak{I}_{P_X}$, dostáváme $\mathcal{H}_{P_X}(X) = \mathbb{E}\left(\mathfrak{I}_{P_X}\right)$, kde střední hodnotu chápeme opět vzhledem k $(A, 2^A, P_X)$. To je druhý možný význam tvrzení, že entropie X je její průměrný informační obsah, který odpovídá naivnímu přístupu k hodu kostkou popsanému v Kapitole 2. Připomeňme, že tento přístup je nevhodný právě proto, že pro každý náhodný jev zavádí jeho vlastní pravděpodobnostní prostor, což mimo jiné vyžaduje neustálé upřesňování vzhledem k jakému prostoru počítáme střední hodnotu.

Následující tvrzení dokazuje důležitý a intuitivní fakt, že manipulací s hodnotami náhodné veličiny nemůžeme získat víc informace než kolik je jí tam už obsaženo. Naopak tak můžeme informaci ztratit, a to právě tehdy, pokud „zapomeneme“ některé rozdíly mezi hodnotami.

Tvrzení 3.4. *Buď $X : \Omega \to A$ náhodná veličina a buď $f : A \to A'$ zobrazení. Potom $f \circ X$ je náhodná veličina s hodnotami v A' a platí $\mathfrak{I}_{f\circ X} \leq \mathfrak{I}_X$ s.j. a $\mathcal{H}(f(X)) \leq \mathcal{H}(X)$. Pokud je zobrazení f injektivní, pak platí rovnosti (ta první opět jen skoro jistě).*

Důkaz. Pro $\omega \in s(X)$, $\mathfrak{I}_{f\circ X}(\omega) \leq \mathfrak{I}_X(\omega)$ plyne z inkluze

$$X^{-1}(X(\omega)) \subseteq (f \circ X)^{-1}((f \circ X)(\omega)).$$

Pokud je zobrazení f injektivní, dostáváme rovnost množin a příslušné rovnosti. □

Typickým příkladem je projekce, tedy zobrazení „zapomínající“ jednu (nebo více) složek.

Tvrzení 3.5. *Pro dvě náhodné veličiny X, Y platí $\mathfrak{I}_X \leq \mathfrak{I}_{X,Y}$ s.j. a $\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(X, Y)$.*

Důkaz. Stačí aplikovat předchozí Tvrzení pro $f : A \times B \to A$ definované jako projekce na první souřadnici, tj. $f(a, b) = a$. □

Tvrzení 3.6. *$X_0, X_1, .., X_{n-1}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pak*

$$\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{I}_{X_i} \text{ s.j.}, \qquad \mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}\left(X_i\right).$$

Důkaz. Pokud jsou veličiny nezávislé, pak pro $\omega \in s\left(X_0, X_2, \ldots, X_{n-1}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}(\omega) &= -\log P_{X_{[0..n)}}\left(X_{[0..n)}(\omega)\right) = -\log \prod_{i=0}^{n-1}\left(P_{X_i}\left(X_i(\omega)\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} -\log\left(P_{X_i}(X_i(\omega))\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{I}_{X_i}(\omega).\end{aligned}$$

□

3.1 Podmíněná informace a podmíněná entropie

Důležitým konceptem v teorii pravděpodobnosti je podmiňování. Základem je podmiňování určitým jevem, a z toho odvozené podmiňování diskrétní náhodnou veličinou. Pro náhodný jev $U \subseteq \Omega$, $\mathbb{P}(U) > 0$, definujeme pravděpodobnost podmíněnou tímto jevem následujícím předpisem:

$$\mathbb{P}_U(V) = \frac{\mathbb{P}(V \cap U)}{\mathbb{P}(U)}, \qquad V \in \mathcal{F}.$$

Takto definované zobrazení je opět pravděpodobnostní mírou na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Pro diskrétní náhodnou veličinu Y s hodnotami v B můžeme tuto podmínku promítnout do rozdělení P_Y a definovat **podmíněné rozdělení** $P_{Y|U}$ následovně

$$P_{Y|U} := \frac{\mathbb{P}\left(Y^{-1}(b) \cap U\right)}{\mathbb{P}(U)}, \qquad b \in B.$$

Nejčastěji budeme podmiňovat jevem popsaným jinou náhodnou diskrétní náhodnou veličinou X. Máme-li tedy diskrétní náhodnou veličinu X s hodnotami v A, budeme symbolem $P_{Y|X}$ značit rodinu rozdělení $\left\{P_{Y|X=a}\right\}_{a \in s(P_X)}$, kde „$X = a$“ chápeme opět jako zápis jevu z $\mathcal{F}$. Pro dané $a \in s(X)$, je pak $P_{Y|X=a}$ korektně definované rozdělení na B, které je podmíněné jevem $X^{-1}(a)$. Pro jednoduchost pak budeme pro $P_{Y|X=a}(b)$ používat také zápis $P_{Y|X}(a, b)$ (všimněte si pořadí argumentů). Není těžké nahlédnout, že

$$P_{Y|X}(a, b) = \frac{P_{X,Y}(a, b)}{P_X(a)}, \qquad a \in s\left(P_x\right), b \in B.$$

Z tohoto klasického konceptu podmiňování pak vycházejí následující definice.

Definice 3.7. ***Informační obsah*** *náhodné veličiny Y za* ***podmínky*** *X je*

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{Y|X}(\omega) &= -\log \mathbb{P}(Y = Y(\omega) \mid X = X(\omega)) \\ &= -\log P_{Y|X}(X(\omega), Y(\omega)), \qquad \omega \in s(X, Y).\end{aligned}$$

Náhodná veličina $\mathfrak{I}_{Y|X}$ vyjadřuje pro daný stav míru dodatečné informace, kterou přináší znalost Y při znalosti X. Je definována skoro jistě, konkrétně na nosiči vektoru (X, Y). Všimněme si zejména, že $s\left(P_{X,Y}\right) \subseteq s\left(P_X\right)$. Její střední hodnotu definujeme jako nový pojem.

Definice 3.8. ***Entropie*** *náhodné veličiny Y za* ***podmínky*** *X je*

$$\mathcal{H}(Y \mid X) = \mathbb{E}\left(\mathfrak{I}_{Y|X}\right).$$

Uvědomme si nejprve, že $\mathcal{H}(Y \mid X)$ je nové značení. Není to zejména entropie $Y \mid X$, už proto že žádnou takovou náhodnou veličinu jsme nedefinovali a $P_{Y|X}$ není samo o sobě rozdělení, je to rodina podmíněných rozdělení. Tato rozdělení už mají bezprostřední vazbu na zmíněnou podmíněnou entropii.

Definice 3.9. *Pro náhodný jev $U \in \Omega$ nenulové pravděpodobnosti nazveme* ***entropií*** *náhodné veličiny Y za* ***podmínky*** *U entropii podmíněného rozdělení $\mathcal{H}\left(P_{Y|U}\right)$. Tuto entropii budeme také značit $\mathcal{H}(Y \mid U)$.*

Entropie $\mathcal{H}(Y \mid X = a)$, neboli $\mathcal{H}\left(P_{Y|X=a}\right)$, může být k entropii $\mathcal{H}(Y)$ v libovolném vztahu. Dozvíme-li se hodnotu náhodné proměnné X může se naše nejistota o Y jak zvýšit tak snížit.

Pro entropii veličiny za podmínky platí následující explicitní formule.

Tvrzení 3.10.

$$\mathcal{H}(Y \mid X) = \sum_{(a,b)\in s\left(P_{X,Y}\right)} P_{X,Y}(a,b) \cdot \log \frac{P_X(a)}{P_{X,Y}(a,b)} = \\ = \sum_{a\in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot \mathcal{H}(Y \mid X = a) \ .$$

Důkaz. Veličina $\mathfrak{I}_{Y|X}(\omega)$ nabývá na definičním oboru $s(X,Y)$ hodnot

$$-\log P_{X|Y}(a,b) = \log \frac{P_X(a)}{P_{X,Y}(a,b)} \ .$$

První rovnost je tedy přímočarým výpočtem střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny podle definice.

Pro $a \in s(A)$ je rozdělení $P_{Y|X=a}$ definováno na B jako $\frac{P_{X,Y}(a,b)}{P_X(a)}$ a podle definic tedy

$$\mathcal{H}(Y \mid X = a) = \sum_{b\in s\left(P_{Y|X=a}\right)} P_{Y|X=a}(b) \cdot \left(-\log P_{Y|X=a}(b)\right) = \\ = \sum_{b\in s\left(P_{Y|X=a}\right)} \frac{P_{X,Y}(a,b)}{P_X(a)} \cdot \log \frac{P_X(a)}{P_{X,Y}(a,b)} \ .$$

Proto

$$\sum_{a\in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot \mathcal{H}(Y \mid X = a) = \sum_{a\in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot \sum_{b\in s\left(P_{Y|X=a}\right)} \frac{P_{X,Y}(a,b)}{P_X(a)} \cdot \log \frac{P_X(a)}{P_{X,Y}(a,b)} \\ = \sum_{a\in s\left(P_X\right)} \sum_{b\in s\left(P_{Y|X=a}\right)} P_{X,Y}(a,b) \cdot \log \frac{P_X(a)}{P_{X,Y}(a,b)} \ .$$

Pro druhou rovnost tedy zbývá ověřit, že sčítáme přes stejnou množinu

$$s\left(P_{X,Y}\right) = \left\{(a,b) \mid a \in s\left(P_X\right), b \in s\left(P_{Y|X=a}\right)\right\} \ .$$

□

Vidíme, že entropie Y za podmínky X je váženým průměrem z entropií podmíněných rozdělení. Je to tedy průměrné množství informace nutné k určení Y, pokud již známe X.

Nyní definujeme poslední informační veličinu tohoto oddílu.

Definice 3.11. ***Vzájemný informační obsah*** *náhodných veličin X a Y definujeme předpisem:*

$$\mathfrak{I}_{X:Y}(\omega) = \log \frac{\mathbb{P}(X = X(\omega), Y = Y(\omega))}{\mathbb{P}(X = X(\omega)) \cdot \mathbb{P}(Y = Y(\omega))} \ .$$

Funkce $\mathfrak{I}_{X:Y}$ je definovaná na $s(X,Y)$. Proto je definovaná skoro jistě. Neformální ospravedlnění této definice plyne z toho, že vzájemný informační obsah je nulový právě tehdy, kdy je pravděpodobnost jevu $(X,Y) = (a,b)$ rovna součinu pravděpodobností $X = a$ a $Y = b$, tedy v situaci, kdy jsou oba jevy nezávislé. Závislé jevy mohou mít vzájemnou informaci kladnou i zápornou, čímž se tato veličina liší od jiných informačních veličin definovaných v tomto textu. Ukážeme nicméně, že má nezápornou střední hodnotu, která je navíc definovaná i v případě spočetného $s\left(P_{X,Y}\right)$. Tato střední hodnota bývá nazývána vzájemnou informací. My se budeme držet pojmu „entropie“, abychom zdůraznili, že se jedná pouze o průměrnou hodnotu, ale alternativní název promítneme do notace.

Definice 3.12. ***Vzájemnou entropii*** *náhodných veličin X a Y definujeme předpisem:*

$$\mathcal{I}(X:Y) = \mathbb{E}\left(\mathfrak{I}_{X:Y}\right) = \sum_{(a,b)\in s\left(P_{X,Y}\right)} P_{X,Y}(a,b)\cdot\log\frac{P_{X,Y}(a,b)}{P_X(a)P_Y(b)}.$$

Příklad 3.13. Uvažujme pravděpodobnostní rozdělení

$$P_{X,Y}:\ \begin{array}{c|cc} X\backslash Y & b_0 & b_1 \\ \hline a_0 & 1/2 & 0 \\ a_1 & 1/4 & 1/4 \end{array},\quad P_{Y|X}:\ \begin{array}{c|cc} X\backslash Y & b_0 & b_1 \\ \hline a_0 & 1 & 0 \\ a_1 & 1/2 & 1/2 \end{array},\quad P_{X|Y}:\ \begin{array}{c|cc} X\backslash Y & b_0 & b_1 \\ \hline a_0 & 2/3 & 0 \\ a_1 & 1/3 & 1 \end{array}.$$

Pak marginální rozdělení jsou $P_X = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, a $P_Y = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$. Dále $\mathcal{H}(X) = 1$, $\mathcal{H}(Y) \doteq 0.811$, $\mathcal{H}(X,Y) = \frac{3}{2}$, $\mathcal{I}(X:Y) = 0.311$. Pro podmíněné entropie dostáváme

$$0 = \mathcal{H}\left(Y \mid X = a_0\right) < \mathcal{H}(Y) < \mathcal{H}\left(Y \mid X = a_1\right) = 1.$$

Podmíněná entropie $\mathcal{H}(Y \mid X) = \frac{1}{2}$ je již menší než $\mathcal{H}(Y)$. Podobně $\mathcal{H}(X \mid Y) = 0.689 < \mathcal{H}(X)$.

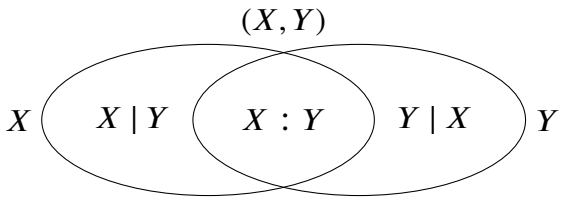
Přímo z definic a z linearity střední hodnoty dostáváme:

Tvrzení 3.14. *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Pak na $s(X,Y)$ platí*

- $\mathfrak{I}_{X,Y} = \mathfrak{I}_{Y|X} + \mathfrak{I}_X$,
- $\mathfrak{I}_X = \mathfrak{I}_{X:Y} + \mathfrak{I}_{X|Y}$.

Dále platí

- $\mathcal{H}(X,Y) = \mathcal{H}(Y \mid X) + \mathcal{H}(X)$,
- $\mathcal{H}(X) = \mathcal{I}(X:Y) + \mathcal{H}(X \mid Y)$.



Obrázek 3: Informace a entropie vzájemná a za podmínky

Tyto vztahy dohromady tvoří užitečný diagram na Obrázku 3. Z něj lze názorně získávat další rovnosti, např. následující alternativní definici vzájemného informačního obsahu a vzájemné entropie:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{X:Y} &= \mathfrak{I}_X + \mathfrak{I}_Y - \mathfrak{I}_{X,Y},\\ \mathcal{I}(X:Y) &= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X,Y)\ .\end{aligned}$$

Vztah lze přímočaře rozšířit na více veličin.

Tvrzení 3.15 (Řetězové pravidlo)**.** *Pro posloupnost náhodných veličin $X_0, \dots X_{n-1}$ platí rovnosti*

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{I}_{X_i|X_{[0..i)}}\\ &= \mathfrak{I}_{X_0} + \mathfrak{I}_{X_1|X_0} + \mathfrak{I}_{X_2|X_0,X_1} + \cdots + \mathfrak{I}_{X_{n-1}|X_{[0,n-1)}}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}\left(X_i \mid X_{[0..i)}\right)\\ &= \mathcal{H}\left(X_0\right) + \mathcal{H}\left(X_1 \mid X_0\right) + \mathcal{H}\left(X_2 \mid X_0, X_1\right) + \cdots + \mathcal{H}\left(X_{n-1} \mid X_{[0,n-1)}\right),\end{aligned}$$

první z nich na s $\left(X_{[0..n)}\right)$.

Důkaz. Jedná se o opakovanou aplikaci Tvrzení 3.14. Neboli, postupujeme indukcí dle počtu veličin. Pro $n = 1$ platí triviálně. Pokud vztah platí pro jakoukoliv posloupnost délky n, pak pro posloupnost $X_0, \dots, X_n$ délky $n+1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{X_{[0..n+1)}} &= \mathfrak{I}_{X_{[0..n)}} + \mathfrak{I}_{X_n|X_{[0..n)}}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{I}_{X_i|X_{[0..i)}} + \mathfrak{I}_{X_n|X_{[0..n)}} = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{I}_{X_i|X_{[0..i)}}.\end{aligned}$$

Druhou rovnost odvodíme analogicky, nebo přímo z definice pomocí linearity střední hodnoty. □

Kontrolní otázky

1. Proč pro diskrétní náhodnou veličinu platí $\mathbb{P}(s(X)) = 1$? Jakou roli zde hraje předpoklad, že X je diskrétní?
2. Ověřte $\mathcal{H}(X) = \mathbb{E}(\mathfrak{I}(X))$.
3. Proč se v Tvrzení 3.4 používá „skoro jistě“?
4. Dokažte $s\left(P_{X,Y}\right) \subseteq s\left(P_X\right)$.
5. Ověřte $s\left(P_{X,Y}\right) = \left\{(a,b) \mid a \in s\left(P_X\right), b \in s\left(P_{Y|X=a}\right)\right\}$.

3.2 Divergence entropie

Uvažujme nyní dvě pravděpodobnostní rozdělení P a Q na stejné konečné množině A.

Definice 3.16. ***Divergence entropie*** *rozdělení P vzhledem k rozdělení Q je definována vzorcem*

$$\mathcal{D}(P \parallel Q) = \mathcal{D}(P \parallel Q) = \sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot \log \frac{P(a)}{Q(a)},$$

pokud $s(P) \subseteq s(Q)$. Jinak $\mathcal{D}(P \parallel Q) = +\infty$.

Význam této definice a důvod, proč se nazývá „divergencí“, lze ilustrovat následující úvahou. Všimněme si, že platí

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(P \parallel Q) &= -\sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot \log Q(a) + \sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot \log P(a) \\ &= -\sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot \log Q(a) - \mathcal{H}(P).\end{aligned}$$

Jedná se tedy o rozdíl mezi entropií P a jakousi „pomýlenou entropií“ při které přisuzujeme náhodným jevům informační obsah daný rozdělením Q. To odpovídá situaci, kdy kódování vhodné pro rozdělení Q aplikujeme na rozdělení P.

Vlastnosti divergence odvodíme z konvexity logaritmu. Připomeňme příslušné definice.

Definice 3.17. *Reálná funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je **konvexní** na intervalu I, pokud její graf leží pod každou její sečnou, tj, pokud pokud pro každé $x, y \in I$ a každé $t \in (0,1)$ platí*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

*Funkce f je **striktně konvexní**, pokud pro každé $x \neq y \in I$ platí ostrá nerovnost*

$$f(tx + (1-t)y) < t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y).$$

*Funkce f je **(striktně) konkávní**, je-li funkce $-f$ (striktně) konvexní.*

Pro konvexní funkce platí tvrzení o Jensenově nerovnost, která citujeme bez důkazu.

Tvrzení 3.18 (Jensenova nerovnost I)**.** *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce, $x_1, \ldots, x_n \in I$ a nechť $t_1, \ldots, t_n$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet je* 1*. Pak*

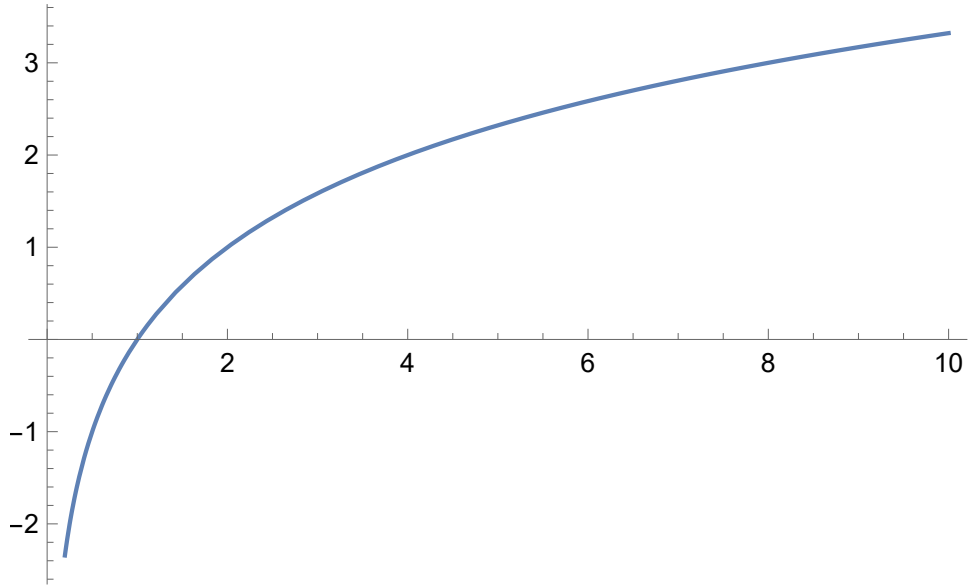
$$f\left(\sum_{i\leq n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot f(x_i)$$

Pokud je f striktně konvexní a platí rovnost, potom je množina $\{x_i \mid t_i > 0\}$ jednoprvková.

Tvrzení 3.19 (Jensenova nerovnost II)**.** *Buď ξ reálná diskrétní veličina, s $\left(P_\xi\right) \subseteq I$, $f : I \to \mathbb{R}$ buď konvexní. Potom*

$$f(\mathbb{E}(\xi)) \leq \mathbb{E}(f(\xi)).$$

Pokud je f striktně konvexní a platí rovnost, potom je ξ triviální, t.j. s $\left(P_\xi\right)$ je jednoprvková.



Obrázek 4: Graf (konkávní) funkce $\log x$

Je-li $f''(x) > 0$ na otevřeném intervalu I, pak f je striktně konvexní na I. Protože pro logaritmus platí $\log_a''(x) = -1/(x^2 \ln a)$ je logaritmus striktně konkávní na $(0, \infty)$ (viz obrázek 4).

Z konkávnosti logaritmu plyne klíčová vlastnost divergence, totiž její nezápornost. Ve smyslu předchozího neformálního popisu divergence to znamená, že „po-mýlená“ entropie je vždy větší než ta skutečná. To také předjímá budoucí poznatky o tom, že nejefektivněji se vždy kóduje kódy odpovídajícími skutečnému informačnímu obsahu.

Tvrzení 3.20. *$\mathcal{D}(P \parallel Q) \geq 0$ a rovnost nastává právě když $P = Q$.*

Důkaz. Stačí uvažovat případ $s(P) \subseteq s(Q)$. Jelikož je $-\log x$ striktně konvexní a striktně klesající, dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(P \parallel Q) &= \sum_{a \in s(P)} P(a) \left(-\log \frac{Q(a)}{P(a)} \right) \geq -\log \left(\sum_{a \in s(P)} P(a) \cdot \frac{Q(a)}{P(a)} \right) \\ &= -\log \left(\sum_{a \in s(P)} Q(a) \right) \geq -\log \left(\sum_{a \in s(Q)} Q(a) \right) = 0.\end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli namísto nerovností rovnosti, musí být $s(P)$ rovno $s(Q)$ a podíl $\frac{Q(a)}{P(a)}$ musí být roven konstantě α pro všechna $a \in s(P)$. Z předchozího plyne,

$$\alpha = \sum_{a \in s(P)} P(a) \frac{Q(a)}{P(a)} = \sum_{a \in s(Q)} Q(a) = 1.$$

□

Z předchozího tvrzení plyne řada užitečných výsledků.

Tvrzení 3.21. *Nechť má veličina X hodnoty v n-prvkové množině A. Pak $\mathcal{H}(X) \leq \log(n)$. Rovnost nastane právě tehdy když je P_X rovnoměrně rozloženo na A.*

Důkaz. Na množině A uvažujme rovnoměrné rozložení U_n, dané předpisem $U_n(a) = \frac{1}{n}$ pro každé $a \in A$. Potom $s\left(P_X\right) \subseteq s\left(U_n\right)$ a

$$0 \leq \mathcal{D}\left(P_X \parallel U_n\right) = \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a) \log \left(\frac{P_X(a)}{\frac{1}{n}} \right) = \log(n) - \mathcal{H}(X).$$

Kýžená rovnost nastane právě tehdy když P_X a U_n splývají. □

Následující věta dává divergenci do úzké souvislosti se vzájemnou informací. Jedná se tak o dalšího kandidáta na alternativní definici vzájemné entropie jako „divergence od nezávislosti“. V jeho znění vystupuje rozdělení $P_X \cdot P_Y$, což je rozdělení na $A \times B$, definované předpisem $(P_X \cdot P_Y)(a, b) = P_X(a) P_Y(b)$, jsou-li P_X a P_Y rozdělení definovaná na A a B.

Tvrzení 3.22. *$\mathcal{I}(X : Y) = \mathcal{D}\left(P_{X,Y} \parallel P_X \cdot P_Y\right)$. Tedy $\mathcal{I}(X : Y) \geq 0$ a rovnost nastává právě když X a Y jsou nezávislé.*

Důkaz. Lze lehko nahlédnout, že $s\left(P_{X,Y}\right) \subseteq s\left(P_X \cdot P_Y\right)$. Proto

$$\mathcal{I}(X : Y) = \sum_{(a,b) \in s\left(P_{X,Y}\right)} P_{X,Y}(a, b) \log \frac{P_{X,Y}(a, b)}{P_X(a) \cdot P_Y(b)} = \mathcal{D}(P_{X,Y} \parallel P_X \cdot P_Y).$$

Tedy $\mathcal{I}(X : Y) \geq 0$ a rovnost nastane právě tehdy když $P_{X,Y}$ je totožné s $P_X \cdot P_Y$, neboli když jsou veličiny X a Y nezávislé. □

Ze součtových vzorců nyní okamžitě plyne:

Tvrzení 3.23. *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Pak*

(1) $\mathcal{H}(X,Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$

(2) $\mathcal{H}(X \mid Y) \leq \mathcal{H}(X)$.

Rovnosti nastanou právě tehdy, když jsou veličiny nezávislé.

Předchozí vlastnosti lze pak také odvodit jiným způsobem, který se ukáže přínosným v následující kapitole.

3.3 Entropie jako funkce na prostoru rozdělení

V této části kapitoly budeme uvažovat entropii jako funkci na prostoru rozdělení Δ_A. K tomuto účelu využijeme pojem konvexní kombinace rozdělení zavedený na str. 8. Uvažujme tedy nějaký konečný soubor rozdělení $\left(P_i\right)_{i\in I} \subseteq \Delta_A$ a soubor reálných nezáporných vah $\left(\alpha_i\right)_{i\in I}$, které se sečtou na jedničku. Konvexní kombinací daných rozdělení s danými vahami nyní rozumíme rozdělení $P \in \Delta_A$ dané předpisem

$$P(a) = \sum_{i\in I} \alpha_i P_i(a), \qquad a \in A.$$

Tuto kombinaci také zapisujeme jako $P = \sum_{i\in I} \alpha_i P_i$. Není těžké ověřit, že se opět jedná o rozdělení, čili, že $(P(a))_{a\in A}$ je soubor nezáporných reálných čísel, jejichž součet je jedna.

Rozšiřme nyní pojem konvexní a konkávní funkce i na prostor Δ_A takto:

Definice 3.24. *Reálná funkce $f : \Delta_A \to \mathbb{R}$ je **konvexní**, pokud pro každé $P, Q \in \Delta_A$ a každé $t \in (0,1)$ platí*

$$f(tP + (1-t)Q) \leq t \cdot f(P) + (1-t) \cdot f(Q)\,.$$

*Funkce f je **striktně konvexní**, pokud pro každé $P \neq Q \in I$ platí ostrá nerovnost*

$$f(tP + (1-t)Q) < t \cdot f(P) + (1-t) \cdot f(Q)\,.$$

*Funkce f je **(striktně) konkávní**, je-li funkce $-f$ (striktně) konvexní.*

Všimněte si, že $tP + (1-t)Q$ je konvexní kombinace rozdělení P a Q. Při této definici konvexity pak platí také následující varianta Jensenovy nerovnosti.

Tvrzení 3.25 (Jensenova nerovnost III)**.** *Nechť $P_1, \ldots, P_n \in \Delta_A$ a nechť $t_1, \ldots, t_n$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet je* 1*, $f : \Delta_A \to \mathbb{R}$. Pokud je f konvexní, pak*

$$f\left(\sum_{i\leq n} t_i P_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot f(P_i)$$

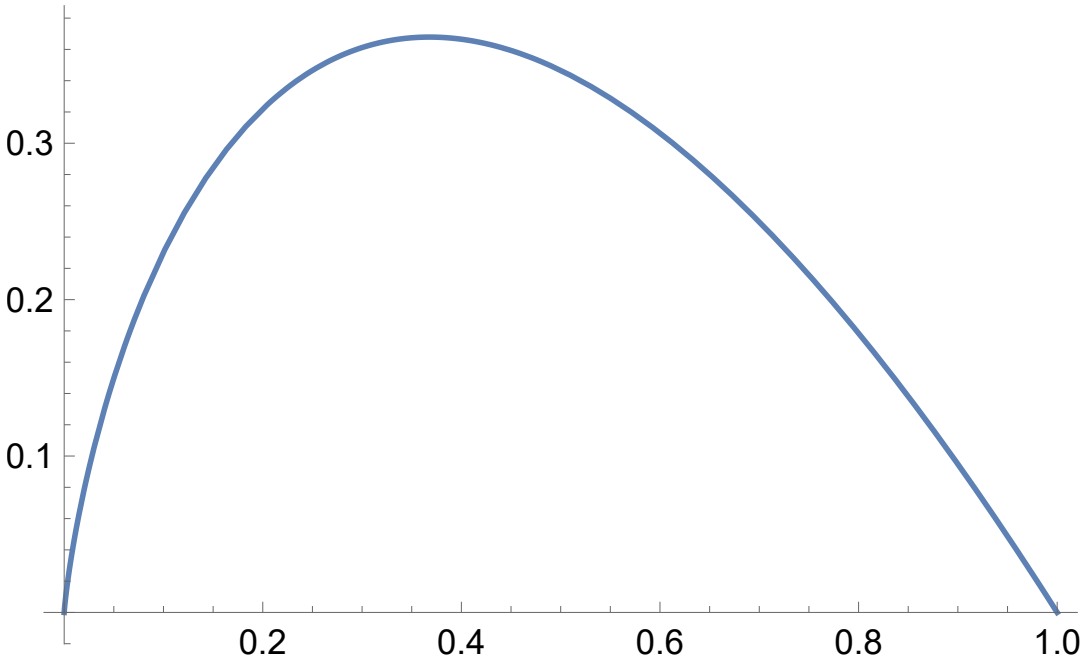
Pokud je f striktně konvexní a platí rovnost, potom je množina $\{P_i \mid t_i > 0\}$ jednoprvková.

Pokud je f konkávní, platí opačná nerovnost. V případě striktně konkávní funkce f platí rovnost právě tehdy když je množina $\{P_i \mid t_i > 0\}$ jednoprvková.

Uvažujeme nyní funkci $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ -x \log x, & x > 0. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá, mimo jiné je tedy spojitá zprava v nule. Navíc má na intervalu $(0, \infty)$ zápornou druhou derivaci $\phi''(x) = -\log_2(e)/x$. Funkce je tedy striktně konkávní na $(0, \infty)$. Díky spojitosti v nule je pak striktně konkávní na celém svém definičním oboru $[0, \infty)$. Na intervalu $[0, 1]$, který nás zajímá, je graf funkce znázorněn na Obrázku 5.



Obrázek 5: Graf (konkávní) funkce $\phi(x) = -x \log x$
(s maximem v bodě $1/e$)

Entropii rozdělení $P \in \Delta_A$ lze nyní zapsat jako

$$\mathcal{H}(P) = \sum_{a \in A} \phi(P(a)).$$

Díky vhodnému dodefinování v nule tak v tomto vztahu nepotřebujeme omezení na nosič rozdělení. To je užitečné v důkazu následujícího lemmatu.

Lemma 3.26. *Entropie je striktně konkávní na prostoru rozdělení Δ_A.*

Důkaz. Buď $P, Q \in \Delta_A$, $t \in (0,1)$. Pak platí

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(tP + (1-t)Q) &= \sum_{a\in A} \phi(tP(a) + (1-t)Q(a)) \\ &\geq \sum_{a\in A} (t\phi(P(a)) + (1-t)\phi(Q(a))) \\ &= t\sum_{a\in A} \phi(P(a)) + (1-t)\sum_{a\in A} \phi(Q(a)) = t\mathcal{H}(P) + (1-t)\mathcal{H}(Q),\end{aligned}$$

kde nerovnost vyplývá z konkavity funkce ϕ. Pokud $P \neq Q$, pak existuje $a_0 \in A$ takové, že se $P(a_0)$ liší od $Q(a_0)$. Ze striktní konkavity ϕ plyne, že se příslušné členy v sumách budou lišit, a proto vyjde celkově ostrá nerovnost. Funkce entropie je tedy striktně konkávní na prostoru rozdělení Δ_A. □

Tato vlastnost entropie může posloužit k alternativním důkazům některých tvrzení v této kapitole. Důležité je následující pozorování, podle kterého je (nepodmíněné) rozdělení konvexní kombinací rozdělení podmíněných:

$$P_Y = \sum_{a\in s(P_X)} P_X(a) \cdot P_{Y|X=a},$$

kde příslušné váhy jsou pravděpodobnosti jednotlivých podmínek. Důsledkem striktní konkávnosti entropie pak je, že

$$\mathcal{H}(Y) = \mathcal{H}\left(P_Y\right) \geq \sum_{a\in s(P_X)} P_X(a) \cdot \mathcal{H}\left(P_{Y|X=a}\right) = \mathcal{H}(Y \mid X),$$

kde rovnost nastává pouze v případech, kdy $P_{Y|X=a} = P_Y$ pro všechna $a \in s\left(P_X\right)$. Taková podmínka je ovšem ekvivalentní s nezávislostí (je třeba si trochu rozmyslet). Dokázali jsme tedy takto, že je podmíněná entropie vždy menší nebo rovna nepodmíněné a rovná se pouze v případě nezávislosti. Z tohoto faktu pak lze odvodit nezápornost vzájemné entropie a další podobná tvrzení, včetně charakterizace nezávislých veličin pomocí těchto pojmů.

Přímo z konkávnosti funkce ϕ také snadno plyne, že entropie je na množině A velikosti n maximální pro uniformní rozdělení U_n.

$$H(U_n) = \sum_{a\in A} \phi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{a\in A} \phi\left(\sum_{a'\in A} \frac{1}{n} P(a')\right) \geq \sum_{a\in A}\sum_{a'\in A} \frac{1}{n}\phi(P(a')) = H(P).$$

Není-li P uniformní, je nerovnost díky striktní konkávnosti ostrá. Všimněte si, že zde nehraje roli, že ϕ nenabývá maxima v bodě $\frac{1}{2}$.

Jiná úvaha vedoucí ke stejnému výsledku využívá konkávnost entropie a nezávislost entropie na permutaci hodnot (tedy její symetrie). Pro rozdělení $P \in \Delta_A$ uvažujme cyklickou permutaci $\sigma : A \to A$. Dále definujme P_i, $i = 1 \ldots n$, jako rozdělení dané předpisem

$$P_i(a) = P(\sigma^i(a)), \qquad a \in A.$$

Ze symetrie entropie plyne $\mathcal{H}\left(P_i\right) = \mathcal{H}(P)$, $i = 1 \dots n$. Vzhledem k cykličnosti permutace navíc pro každé $a \in A$ projdou obrazy iterovaných permutací $(\sigma^i)(a)$, $i = 1 \dots n$, postupně celou množinu A (každý prvek jednou). Proto je aritmetickým průměrem permutovaných rozdělení rozdělení uniformní na A. Opravdu, pro $a \in A$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i(a) = \frac{1}{n}\sum_{a\in A} P(a) = \frac{1}{n} = U_n(a).$$

Nakonec

$$\mathcal{H}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\mathcal{H}\left(P_i\right) \leq \mathcal{H}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}P_i\right) = \mathcal{H}\left(U_n\right).$$

Kontrolní otázky

1. Dokažte, že $P_{Y|X=a} = P_Y$ pro všechna $a \in s\left(P_X\right)$, právě když jsou veličiny X a Y nezávislé.

3.4 Vztah tří náhodných veličin. Podmíněná vzájemná entropie a podmíněná nezávislost.

Příklad 3.27. Nechť $X_1, X_2 : \Omega \to B$, kde B je nějaká dvouprvková množina, jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $X_3 = (X_1 + X_2) \mod 2$.

Pak X_i, X_j jsou nezávislé, kdykoliv $i \neq j$, ale trojice X_1, X_2, X_3 nezávislá není. Pro entropii platí (i,j různá)

$$\mathcal{H}\left(X_i\right) = 1, \qquad \mathcal{H}\left(X_i, X_j\right) = 2, \qquad \mathcal{H}\left(X_1, X_2, X_3\right) = 2.$$

Tvrzení 3.28. *Nechť X, Y, Z jsou náhodné veličiny. Pak*

(1) $\mathfrak{I}_{X,Y,Z} = \mathfrak{I}_X + \mathfrak{I}_{Y|X} + \mathfrak{I}_{Z|X,Y}$, s.j.

(2) $\mathfrak{I}_{Y,Z|X} = \mathfrak{I}_{Y|X} + \mathfrak{I}_{Z|X,Y}$, s.j.

(3) $\mathcal{H}(X, Y, Z) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y \mid X) + \mathcal{H}(Z \mid X, Y)$

(4) $\mathcal{H}(Y, Z \mid X) = \mathcal{H}(Y \mid X) + \mathcal{H}(Z \mid X, Y)$

Důkaz. Body (1) a (3) jsou řetězové pravidlo (Tvrzení 3.15) pro tři veličiny. Body (2) a (4) plynou z (1) a (3) po odečtení $\mathfrak{I}_X$, resp. $\mathcal{H}(X)$ ze součtového vzorce (Tvrzeni 3.14) pro veličiny X a (Y, Z). □

Poznamenejme ještě, že zápisem $\mathcal{H}(X, Y \mid Z)$ rozumíme entropii sdružené veličiny (X, Y) za podmínky Z. Alternativní uzávorkování $\mathcal{H}(X, (Y \mid Z))$ by ostatně nedávalo dobrý smysl, protože $Y \mid Z$ není, jak jsme viděli, náhodná veličina.

Uvažujeme-li tři náhodné veličiny, bude pro nás důležité kvantifikovat, jak výsledek jedné z nich ovlivní vzájemnou entropii zbylých dvou. Příklad 3.27 ukazuje, že tento účinek může být dramatický. Pro tento účel zavedeme podmíněnou vzájemnou entropii.

Definice 3.29. *Pro náhodný jev $V \subseteq \Omega$ s nenulovou pravděpodobností definujeme vzájemnou entropii veličin X a Y **za podmínky** V vztahem*

$$\mathcal{I}(X : Y \mid U) := \mathcal{H}(X \mid U) + \mathcal{H}(Y \mid U) - \mathcal{H}(X, Y \mid U).$$

*Vzájemnou entropii veličin X a Y **za podmínky** Z, kde Z je náhodná veličina, definujeme vztahem*

$$\mathcal{I}(X : Y \mid Z) := \mathcal{H}(X \mid Z) + \mathcal{H}(Y \mid Z) - \mathcal{H}(X, Y \mid Z).$$

Vzájemná entropie podmíněná náhodnou veličinou Z je opět průměrem vzájemné entropie podmíněné příslušnými jevy, které Z popisuje:

Lemma 3.30.

$$\mathcal{I}(X : Y \mid Z) = \sum_{c \in s(P_Z)} P_Z(c) \cdot \mathcal{I}(X : Y \mid Z = c).$$

Důkaz. Plyne z podobného vztahu pro entropii za podmínky v Tvrzení 3.10. □

V dalším chceme především ukázat, že podmíněná vzájemná entropie je nezáporná, a charakterizovat, kdy je nulová.

Lemma 3.31. *Pro náhodný jev $U \subseteq \Omega$, $\mathbb{P}(U) > 0$, platí*

$$\mathcal{I}(X : Y \mid U) = \mathcal{D}\left(P_{X,Y|U} \parallel P_{X|U} \cdot P_{Y|U}\right).$$

Důkaz. Použijeme známý vzorec pro rozklad podmíněné pravděpodobnosti, podle kterého pro dané $a \in A$ platí

$$P_{X|U}(a) = \mathbb{P}(X = a \mid U) = \sum_{b \in B} \mathbb{P}(X = a, Y = b \mid U) = \sum_{b \in B} P_{X,Y|U}(a, b).$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(P_{X|U}\right) &= -\sum_{a \in s\left(P_{X|U}\right)} P_{X|U}(a) \log\left(P_{X|U}(a)\right) \\
&= -\sum_{a \in s\left(P_{X|U}\right)} \sum_{b \in B} P_{X,Y|U}(a, b) \log\left(P_{X|U}(a)\right) \\
&= -\sum_{(a,b) \in s\left(P_{X,Y|U}\right)} P_{X,Y|U}(a, b) \log\left(P_{X|U}(a)\right).
\end{aligned}$$

Poslední rovnost lze nahlédnout takto: pokud je $P_{X,Y|U}(a,b)$ nenulové, pak je také nenulové $P_{X|U}(a)$, a proto se v první sumě sčítá přes bohatší množinu. Ovšem ve členech, které jsou v první sumě navíc, je zastoupena nulová pravděpodobnost. Tudíž jsou nulové.

Pouhou výměnou náhodných veličin dostáváme, že

$$\mathcal{H}\left(P_{Y|U}\right) = -\sum_{(a,b)\in s\left(P_{X,Y|U}\right)} P_{X,Y|U}(a,b)\log\left(P_{Y|U}(a)\right)\,.$$

Nakonec,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\left(X\,:\,Y\mid U\right) &= \mathcal{H}\left(P_{X|U}\right)+\mathcal{H}\left(P_{Y|U}\right)-\mathcal{H}\left(P_{X,Y|U}\right)\\
&= \sum_{a,b\in s P_{X,Y|U}} P_{X,Y|U}(a,b)\log\left(\frac{1}{P_{X|U}(a)}\right)\\
&\quad+\sum_{a,b\in s P_{X,Y|U}} P_{X,Y|U}(a,b)\log\left(\frac{1}{P_{Y|U}(b)}\right)\\
&\quad+\sum_{a,b\in s P_{X,Y|U}} P_{X,Y|U}(a,b)\log\left(P_{X,Y|U}(a,b)\right)\\
&= \sum_{a,b\in s P_{X,Y|U}} P_{X,Y|U}(a,b)\log\left(\frac{P_{X,Y|U}(a,b)}{P_{X|U}(a)P_{X|U}(b)}\right)\\
&= \mathcal{D}\left(P_{X,Y|U}\parallel P_{X|U}\cdot P_{Y|U}\right),
\end{aligned}$$

kde u poslední rovnosti je třeba dodat, že $s\left(P_{X,Y|U}\right)\subseteq s\left(P_{X|U}\cdot P_{Y|U}\right)$. □

Následující definice přenášejí klíčový pojem nezávislosti do kontextu podmiňování. Řekneme, že jevy $U,V\subseteq\Omega$ jsou **podmíněně nezávislé** vzhledem k jevu $W\subseteq\Omega$, pokud $\mathbb{P}(W)>0$ a platí

$$\mathbb{P}(U\cap V\mid W)=\mathbb{P}(U\mid W)\cdot\mathbb{P}(V\mid W)\,.$$

Pojem podmíněné nezávislosti rozšíříme na náhodné veličiny přirozeným způsobem.

Definice 3.32. *Veličiny X a Y jsou **podmíněně nezávislé** vzhledem k veličině Z, pokud pro všechna $c\in s\left(P_Z\right)$, $(a,b)\in A\times B$, platí*

$$\mathbb{P}(X=a,Y=b\mid Z=c)=\mathbb{P}(X=a\mid Z=c)\cdot\mathbb{P}(Y=b\mid Z=c)\,.\qquad(\perp).$$

Tento vztah značíme zápisem $X\perp Y\mid Z$.

Dvě veličiny jsou tedy podmíněně nezávislé, pokud elementární jevy, které popisují, jsou podmíněně nezávislé vzhledem ke každému možnému jevu popsanému veličinou, kterou podmiňujeme.

Podmíněnou nezávislost lze, podobně jako klasickou nezávislost, zapsat pomocí součinů nepodmíněných pravděpodobností. Takové vyjádření je méně srozumitelné z hlediska významu, ale technicky příjemné, neboť se není třeba omezovat na nosiče veličin.

Lemma 3.33. *Veličiny X a Y jsou podmíněně nezávislé vzhledem k veličině Z, právě když pro každé $(a, b, c) \in A \times B \times C$ platí*

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b, Z = c) \cdot \mathbb{P}(Z = c) = \mathbb{P}(X = a, Z = c) \cdot \mathbb{P}(Y = b, Z = c).$$

Důkaz. Pokud platí rovnost v lemmatu, dostaneme pro každé $c \in s(P_Z)$ vztah pro podmíněnou nezávislost vydělením této rovnosti druhou mocninou nenulové hodnoty $\mathbb{P}(Z = c)$.

Pokud naopak předpokládáme podmíněnou nezávislost, musíme uvážit dva případy. Pro $c \in s(P_Z)$ dostaneme rovnost z lemmatu analogicky k předchozí části důkazu, totiž vynásobením vztahu pro podmíněnou nezávislost druhou mocninou hodnoty $\mathbb{P}(Z = c)$. V případě $c \notin s(P_Z)$ platí rovnost v lemmatu také, protože jsou všechny pravděpodobnosti v ní nulové. □

Nyní můžeme zodpovědět naši otázku ohledně nezápornosti podmíněné vzájemné entropie.

Tvrzení 3.34. *Pro náhodné veličiny platí $\mathcal{I}(X : Y \mid Z) \geq 0$. Rovnost nastane právě tehdy když $X \perp Y \mid Z$, tedy právě když rozdělení $P_{X,Y|Z=c}$ a $P_{X|Z=c} \cdot P_{X|Z=c}$ splývají pro každé $c \in s\left(P_Z\right)$.*

Důkaz. Podle Lemmatu 3.30 je $\mathcal{I}((X : Y \mid Z)$ konvexní kombinací vzájemných entropií podmíněných jednotlivými jevy $Z = c$, $c \in s(Z)$. Tyto vzájemné entropie jsou podle Lemmatu 3.31 a Tvrzení 3.20 nezáporné. Nule se zmíněná konvexní kombinace bude podle Tvrzení 3.20 rovnat právě tehdy, když budou pro všechna $c \in s\left(P_Z\right)$ rozdělení $P_{X,Y|Z=c}$ a $P_{X|Z=c} \cdot P_{Y|Z=c}$ splývat. To je definice podmíněné nezávislosti. □

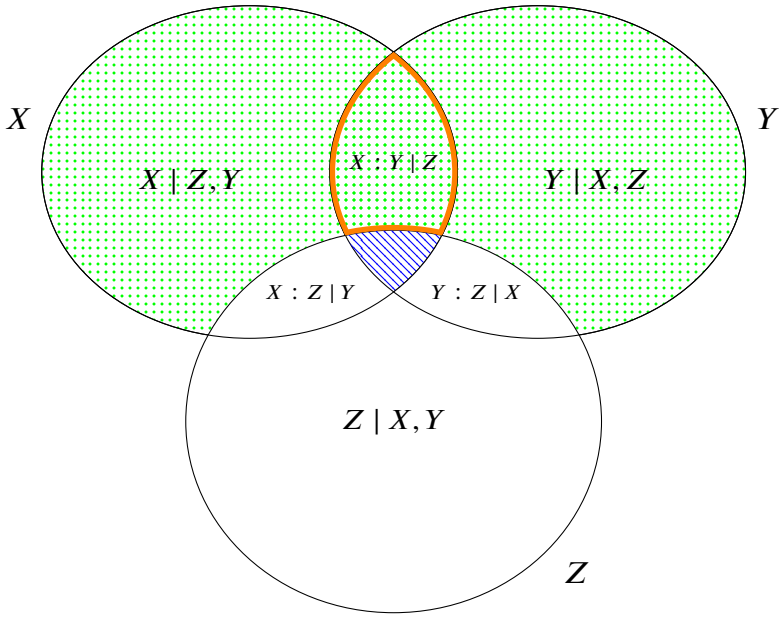
Podmíněná verze součtových vzorců je ilustrována na Obrázku 6, který umožňuje rychlé odvozování různých vztahů. Pro tečkovanou oblast např. dostáváme dvojí vyjádření

$$\mathcal{H}(X, Y \mid Z) = \mathcal{H}(X \mid Y, Z) + \mathcal{H}(Y \mid X, Z) + \mathcal{I}(X : Y \mid Z).$$

Obrázek ovšem vyžaduje důrazné varování. V Příkladu 3.27 je vzájemná entropie $\mathcal{H}\left(X_i : X_j\right)$ nulová, ale podmíněná vzájemná entropie $\mathcal{H}\left(X_i : X_j \mid X_k\right)$ je jeden bit, pro $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Šrafovaná oblast v Obrázku 6, jakási „vzájemná informace tří veličin“, tedy může mít „zápornou plochu“. Příslušná hodnota, kterou bychom mohli být v pokušení značit $\mathcal{I}(X : Y : Z)$, nemá příliš jasný intuitivní význam. Můžeme ji ale např. chápat jako vliv třetí veličiny na vzájemnou informaci druhých dvou. Vidíme, že tento vliv je symetrický, tedy platí

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(X : Y) - \mathcal{I}((X : Y \mid Z) &= \mathcal{I}(Y : Z) - \mathcal{I}(Y : Z \mid X) \\ &= \mathcal{I}(Z : X) - \mathcal{I}(Z : X \mid Y).\end{aligned}$$

Dokažme tedy následující lemma, které poskytuje alternativní vyjádření oblasti vyznačené v Obrazku 6 tučně.



Obrázek 6: Informace a entropie vzájemná a za podmínky pro tři veličiny

Lemma 3.35.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((X : Y \mid Z) &= \mathcal{H}(X,Z) + \mathcal{H}(Y,Z) - \mathcal{H}(Z) - \mathcal{H}(X,Y,Z)\\ &= \mathcal{H}(X \mid Z) - \mathcal{H}(X \mid Y,Z)\\ &= \mathcal{I}(X : (Y,Z)) - \mathcal{I}(X : Z)\,.\end{aligned}$$

Důkaz. Z definice vzájemné entropie za podmínky a ze součtových vztahů pro entropie za podmínky dostáváme následující řadu rovností, obsahující i rovnosti z tvrzení lemmatu:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}((X : Y \mid Z) &= \mathcal{H}(X,Z) - \mathcal{H}(Z) + \mathcal{H}(Y,Z) - \mathcal{H}(Z) - \big(\mathcal{H}(X,Y,Z) - \mathcal{H}(Z)\big)\\ &= \mathcal{H}(X,Z) + \mathcal{H}(Y,Z) - \mathcal{H}(Z) - \mathcal{H}(X,Y,Z)\\ &= \mathcal{H}(X,Z) - \mathcal{H}(Z) - \big(\mathcal{H}(X,Y,Z) - \mathcal{H}(Y,Z)\big)\\ &= \mathcal{H}(X \mid Z) - \mathcal{H}(X \mid Y,Z)\\ &= \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X \mid Y,Z) - \big(\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X \mid Z)\big)\\ &= \mathcal{I}(X : (Y,Z)) - \mathcal{I}(X : Z)\,.\end{aligned}$$

□

Okamžitým důsledkem definice vzájemné entropie za podmínky, Tvrzení 3.34 a druhé a třetí rovnosti předchozího tvrzení jsou tvrzení následující.

Tvrzení 3.36. *Pro tři náhodné veličiny X, Y, Z platí*

(1) $\mathcal{H}(X,Z) + \mathcal{H}(Y,Z) - \mathcal{H}(X,Y,Z) - \mathcal{H}(Z) \geq 0$ (submodularita entropie)*;*

(2) $\mathcal{H}(X, Y \mid Z) \leq \mathcal{H}(X \mid Z) + \mathcal{H}(Y \mid Z)$ (subaditivita podmíněné entropie)*;*

(3) $\mathcal{H}(X \mid Y, Z) \leq \mathcal{H}(X \mid Z)$ (monotonie entropie vzhledem k podmínce)*;*

(4) $\mathcal{I}(X : Z) \leq \mathcal{I}(X : (Y, Z))$ *(*monotonie vzájemné informace).

Rovnosti nastanou současně a to právě v případě, že $X \perp Y \mid Z$.

Na konec této kapitoly uvedeme pojem, který si blíže všímá třetí podmínky v předchozím tvrzení, tedy monotonie entropie vzhledem k podmínce. Ta říká, že entropie klesá se vzrůstající apriorní informací. Případ, kdy větší apriorní informace nepřináší snížení entropie popisuje tzv. markovská vlastnost. Ta pro nás bude důležitá i v kontextu náhodných procesů. Nejprve uveďme definici.

Definice 3.37. *Uspořádaná trojice veličin* X, Z, Y *tvoří* ***markovský řetězec****, značíme* $X \to Z \to Y$*, pokud platí*

$$\mathbb{P}(Y = b \mid Z = c, X = a) = \mathbb{P}(Y = b \mid Z = c),$$

pro všechna $b \in B$, $(a, c) \in s\left(P_{X,Z}\right)$.

Značení pro markovský řetězec nás zve, abychom se dívali na náhodné veličiny X, Y a Z a jako na náhodný proces, tedy jako na posloupnost náhodných událostí v čase, jejichž podmíněná pravděpodobnost je dána nějakými kauzálními souvislostmi. Markovská vlastnost pak znamená, že X ovlivňuje Y výhradně svým účinkem na Z. Známe-li Z, víme vše, čím X přispívá ke znalosti Y. Následující lemma potvrzuje, co naznačuje uvedený neformální popis, totiž že markovská vlastnost je ekvivalentní podmíněné nezávislosti.

Tvrzení 3.38. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $X \to Z \to Y$ *je markovský řetězec*

(2) $Y \to Z \to X$ *je markovský řetězec*

(3) $X \perp Y \mid Z$.

(4) $Y \perp X \mid Z$.

Důkaz. Z definice podmíněné nezávislosti okamžitě plyne, že jsou poslední dvě podmínky ekvivalentní. Vzhledem k symetrii podmínek stačí pro platnost celého lematu dokázat ekvivalenci podmínek (1) a (3).

Dokažme nejprve implikaci (1) $\Rightarrow$ (3). Předpokládejme tedy, že $c \in P_Z$, $a \in A$, $b \in B$. Nejprve prozkoumejme triviální možnost, $(a, c) \notin s\left(P_{X,Z}\right)$. V takovém případě jsou pravděpodobnosti $\mathbb{P}(X = a \mid Z = c)$ a $\mathbb{P}(X = a, Y = b \mid Z = c)$ nulové a

definiční vztah podmíněné nezávislosti je splněn, neboť na obou stranách rovnice dostáváme nulu. Pro netriviální případ $(a, c) \in s\left(P_{X,Z}\right)$ platí definiční vztah markovského řetězce, který vynásobíme dobře definovaným výrazem $\mathbb{P}(X = a \mid Z = c)$ a dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(X = a, Z = c)}{\mathbb{P}(Z = c)} \cdot \frac{\mathbb{P}(Y = b, Z = c, X = a)}{\mathbb{P}(Z = c, X = a)} = \\ = \mathbb{P}(X = a \mid Z = c) \cdot \mathbb{P}(Y = b \mid Z = c),\end{aligned}$$

a krácením nenulové hodnoty $\mathbb{P}(X = a, Z = c)$ dostáváme požadované

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b \mid Z = c) = \mathbb{P}(X = a \mid Z = c) \cdot \mathbb{P}(Y = b \mid Z = c) .$$

Nyní dokažme implikaci (3) $\Rightarrow$ (1). Nechť $(a, c) \in s(P_{Y,Z})$, $b \in B$. Pak také $c \in s\left(P_Z\right)$ a definiční vztah podmíněné nezávislosti můžeme vydělit nenulovou pravděpodobností $\mathbb{P}(X = a \mid Z = c)$ a tím dostaneme definiční vztah pro markovský řetězec, viz předchozí část důkazu. □

Předchozí lemma ukazuje důležitou symetrii vztahu $X \to Z \to Y$, který bychom mohli díky zapisovat jako $X \leftrightarrow Z \leftrightarrow Y$. Tím je zpochybněno výše uvedené výlučně kauzální chápání procesu. Přesto je kauzální interpretace vztahu členů řetězce základní možností aplikace, což vyjadřuje i fakt, že následující nerovnosti, které odpovídají naší neformální diskusi a z markovské vlastnosti přímo plynou, se anglicky označují jako **data processing inequality** (nejčastěji v podobě první z nich, viz Theorem 2.8.1 v CT). Zpracováním dat nemůžeme získat žádnou informaci o jejich zdroji, která již v datech není před zpracováním.

Tvrzení 3.39. *Pro markovský proces $X \to Z \to Y$ platí*

(1) $\mathcal{I}(X : Y) \leq \mathcal{I}(X : Z)$

(2) $\mathcal{I}(Y : X) \leq \mathcal{I}(Y : Z)$

(3) $\mathcal{H}(X \mid Y) \geq \mathcal{H}(X \mid Z)$

(4) $\mathcal{H}(Y \mid X) \geq \mathcal{H}(Y \mid Z)$

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(X : Z) - \mathcal{I}(X : Y) &= H(X) - H(X \mid Z) - (H(X) - H(X \mid Y)) = \\ &= \mathcal{H}(X \mid Y) - \mathcal{H}(X \mid Z) \geq H(X \mid Y, Z) - H(X \mid Z) = \\ &= -I(X : Y \mid Z) = 0,\end{aligned}$$

kde použitá nerovnost byla dokázána v Tvrzení 3.36. Celkově dostáváme platnost nerovností (1) a (3). Zbylé dvě plynou ze symetrie X a Y. □

Kauzální povahu markovského řetězce lze upřesnit jako posloupnost náhodných veličin, kdy následující vznikne vždy „zašuměním“ veličiny předchozí. Neboli $Z = f_1(X, \xi_1)$, kde ξ_1 reprezentuje šum, což je v matematickém pojetí náhodná veličina, a f_1 je deterministická funkce popisující vliv šumu na veličinu X. Podobně $Y = f_2(Z, \xi_2)$, kde ξ_2 reprezentuje další šum a f_2 je opět deterministická funkce. Markovská vlastnost je vyjádřena požadavkem, aby tento šum ξ_2 „nevěděl nic o minulosti“, tedy aby byl nezávislý na páru (X, ξ_1). Uvědomme si, že nestačí, aby byl šum ξ_2 nezávislý na X. Mohlo by se totiž stát, že se nejedná o další šum, ale naopak o odstranění šumu ξ_1.

Kapitolu jsme zahájili Příkladem 3.27, který popisuje situaci, kdy jsou veličiny nezávislé, ale nejsou podmíněně nezávislé. Na závěr poznamenejme, že je možný i opačný případ. Například podmíněná entropie $I(X : Y \mid X)$ je nulová, neboli $X \to X \to Y$ je markovský řetězec, bez ohledu na to, zda jsou X a Y nezávislé, či nikoli.

Kontrolní otázky

1. Dokažte součtové vztahy nad Lemmatem 3.35.

2. Vyjadřují ostatní plochy v Obrázku 6, kromě šrafované, kladné hodnoty?

4 Náhodné procesy a jejich entropie

Matematické pojetí informace vyložené v předchozích kapitolách lze shrnout takto: informace je informační obsah zprávy, což je mínus logaritmus pravděpodobnosti této zprávy. Zprávu tedy chápeme jako hodnotu náhodné veličiny, která vybírá mezi (konečně mnoha) možnými zprávami. Střední hodnota informačního obsahu dané veličiny je její entropie.

Tento popis chceme nyní rozšířit na v praxi všudypřítomnou situaci (potenciálně) nekonečné posloupnosti zpráv. Jedná se tedy o posloupnost $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ náhodných veličin. Pro jednoduchost můžeme předpokládat, že všechny náhodné veličiny nabývají hodnot ze stejné abecedy A. Taková posloupnost se nazývá **náhodný proces**. Klasickým příkladem náhodného procesu jsou písmena v souboru nějakých textů, např. knih v českém jazyce. Z tohoto příkladu je vidět, že mezi jednotlivými veličinami procesu mohou být velmi komplexní závislosti (jak je pravděpodobnostní rozdělení jednadvacátého písmene knihy v závislosti na předchozích dvaceti?), a to i v případě, kdy mají jednotlivé veličiny stejné rozdělení.

Náhodný proces

Náhodný proces bychom mohli zkusit chápat jako jednu náhodnou veličinu nabývající hodnot z množiny A^ω nekonečných posloupností nad abecedou A. Jak už jsme však upozorňovali v Kapitole 2, opustili bychom tím bezpečné vody diskrétní pravděpodobnosti: možných hodnot je (v netriviálních případech) nespočetně mnoho a každá jednotlivá hodnota má nulovou pravděpodobnost. To vyžaduje mnohem robustnější teorii, která se musí opřít o celou teorii pravděpodobnosti včetně celého nezbytného aparátu σ-algebry $\mathcal{F}$ měřitelných množin (v tomto případě nemohou mít všechny množiny konzistentně definovanou pravděpodobnost). Proto budeme v souladu s Kapitolou 2 uvažovat náhodný proces $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jako posloupnost prodlužujících se náhodných vektorů $X_{[0..n)}$ a případně vyšetřovat asymptotické chování takové posloupnosti.

Entropie procesu

V rámci této přednášky nás zajímá především informační obsah náhodného procesu. Chceme pro něj tedy rozumně definovat pojem entropie. Vzhledem k tomu, že je proces limitou náhodných vektorů $X_{[0..n)}$, pro které je entropie dobře definovaná, je jedinou rozumnou možností definice

$$\mathcal{H}(X) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right),$$

která samozřejmě dává smysl jen tehdy, pokud limita existuje (což je ekvivalentní rovnosti $\liminf$ a $\limsup$, které jsou definovány vždy). Jinak říkáme, že náhodný proces entropii nemá.

Entropie procesu je tedy limita entropie připadající průměrně na jeden symbol. Stejnou myšlenku lze zapsat následovně, kdy je entropie počátečního vektoru zapsána přímo jako součet příspěvků jednotlivých symbolů.

Lemma 4.1.

$$\mathcal{H}(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}\left(X_i \mid X_{[0..i)}\right).$$

Důkaz. Přímo z řetězového pravidla (Tvrzení 3.15). □

Pro limitu aritmetického průměru platí následující jednoduché lemma.

Lemma 4.2. *Má-li posloupnost reálných čísel* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *limitu, pak má tutéž limitu i posloupnost částečných průměrů* $b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Důkaz. Nechť je a limita $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pro $\varepsilon > 0$ nechť je $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ číslo takové, že $\left|a_i - a\right| < \varepsilon$ pro každé $n > N(\varepsilon)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $n > N(\varepsilon/2)$ platí

$$\begin{aligned}
\left|b_n - a\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - a\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon/2)}\left|a_i - a\right| + \frac{1}{n}\sum_{i=N(\varepsilon/2)+1}^{n}\left|a_i - a\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\left|a_i - a\right| + \varepsilon/2,
\end{aligned}$$

kde první sčítanec jde k nule. Pro dostatečně velká n je tedy $\left|b_n - a\right| < \varepsilon$, což jsme chtěli ukázat. □

Odtud plyne následující kritérium pro existenci entropie procesu:

Důsledek 4.3. *Pokud* $\mathcal{H}\left(X_n \mid X_{[0..n)}\right)$ *konverguje, má proces* X *entropii.*

Druhy konvergence

V případě entropie jsme vystačili s běžným pojmem limity. U procesu *reálných* náhodných veličin $\left(Y_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ budeme ale také někdy mluvit o tom, že posloupnost takových veličin konverguje k nějaké limitní náhodné veličině Y. Rozeznáváme přitom dva různé typy konvergence. Vzhledem k tomu, že všechny náhodné veličiny reálného procesu $\left(Y_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ jsou zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}$, nabízí se jednak konvergence definovaná bodově. Pro každé $\omega \in \Omega$ je tvrzení $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)$ opět standardní tvrzení o limitě reálné posloupnosti. V souladu s naší zavedenou terminologií tedy řekneme, že $\left(Y_i\right)_{i\in N}$ k Y **konverguje skoro jistě**, pokud

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\right\}\right) = 1.$$

To lze také zapsat vztahem

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq n} \left|Y_k - Y\right| > \varepsilon\right) = 0\,,$$

neboli míra množiny, na které se posloupnost $\left(Y_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ *ještě někdy v budoucnu* odchýlí od Y o více než ε, se pro rostoucí n postupně snižuje až k nule.

Konvergence skoro jistě je výhodná v situaci, kdy máme kontrolu nad bodovým chováním náhodných veličin procesu. Často ale umíme dokázat, že se náhodné veličiny Y_n k veličině Y blíží na vzdálenost ε s velkou pravděpodobností, tedy na množinách míry jdoucí k jedné, nemáme ale dobrou kontrolu nad tím, jaké množiny to jsou. Může se dokonce stát, že body ω se ve zbytkové „ε-neukázněné“ množině pro rostoucí n střídají tak, že posloupnost nekonverguje bodově nikde: pro každé ω se $Y_n(\omega)$ výrazně odchýlí od $Y(\omega)$ nekonečněkrát. Pro tyto situace definujeme slabší pojem **konvergence v pravděpodobnosti**, která nastává, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|Y_n - Y\right| > \varepsilon\right) = 0\,.$$

Pro uvedené konvergence budeme používat zkrácený zápis:

$$Y_n \to Y \text{ v.p.} \qquad Y_n \to Y \text{ s.j.}$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = Y \text{ v.p.} \qquad \lim_{n\to\infty} Y_n = Y \text{ s.j.}$$

AEP

Připomeňme, že entropie je střední hodnota informačního obsahu. Pokud má proces entropii, střední hodnota informačního obsahu přepočítaná na symbol se pro prodlužující se výstupy procesu ustaluje. Zajímavá otázka je, co se při tom děje s jednotlivými informačními obsahy. Ukazuje se, že pro řadu významných procesů máme o chování informačních obsahů jednotlivých výstupů velmi dobrý přehled, který bude navíc hrát klíčovou roli jak při kompresi, tak při přenosu informace kanálem. Konkrétně dochází k tomu, že informační obsahy na jeden symbol konvergují (v jednom z uvedených významů) ke své střední hodnotě, tedy k entropii. To motivuje následující definici.

Definice 4.4. *Řekneme, že náhodný proces $X = (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s entropií má **asymptoticky rovnoměrné rozdělení**, pokud* v.p. *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathfrak{I}_{X_{[0..n)}} = \mathcal{H}(X)\ .$$

Pokud konvergence platí s.j. *, řekneme že X má **silně asymptoticky rovnoměrné rozdělení**.*

Tuto vlastnost budeme v krátkosti označovat jako AEP (z anglického „asymptotic equipartition property“), resp. sAEP. Jak už bylo řečeno, AEP znamená, že výstupy procesu mají s prodlužující se délkou s čím dál větší pravděpodobností informační obsah odpovídající průměru, tedy entropii. Tuto množinu výstupů zachycuje následující definice.

Definice 4.5. *Nechť je X proces s entropií. Množinu*

$$\mathcal{M}_\varepsilon^n(X) = \left\{ u \in A^n \,:\, \left| \frac{1}{n} \mathfrak{I}\left(X_{[0..n)} = u\right) - \mathcal{H}(X) \right| < \varepsilon \right\},$$

nazveme ***ε-typickou množinou výstupů délky*** *n procesu X.*

Prvky typické množiny budeme také neformálně označovat jako „typické výstupy“. Typická množina procesu s AEP má následující vlastnosti.

Tvrzení 4.6. *Buď X proces s AEP a $\delta > 0$.*

(1) Pro $u \in \mathcal{M}_\varepsilon^n$ platí

$$2^{-n(\mathcal{H}(X)+\varepsilon)} \leq \mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) \leq 2^{-n(\mathcal{H}(X)-\varepsilon)}.$$

(2) Pro dostatečně velká n platí $\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} \in \mathcal{M}_\varepsilon^n\right) < 1 - \delta$.

(3) $\left|\mathcal{M}_\varepsilon^n\right| \leq 2^{n(\mathcal{H}(X)+\varepsilon)}$

(4) $\left|\mathcal{M}_\varepsilon^n\right| > (1-\delta) \cdot 2^{n(\mathcal{H}(X)-\varepsilon)}$ pro dostatečně velká n.

Důkaz. (1) plyne z definice typické množiny a (2) z definice AEP.

Podle (1) pro každé $u \in \mathcal{M}_\varepsilon^n$ platí $\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) \geq 2^{-n(\mathcal{H}(X)+\varepsilon)}$. Protože jevy $X_{[0..n)} = u$ jsou pro různá u disjunktní, nemůže jich být víc než tvrdí (3).

Podobně pro n, pro které podle bodu (2) platí $\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} \in \mathcal{M}_\varepsilon^n\right) > 1 - \delta$, musí vzhledem k $\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) \leq 2^{-n(\mathcal{H}(X)-\varepsilon)}$ mohutnost $\mathcal{M}_\varepsilon^n$ splňovat (4). □

Podle předchozího tvrzení mají typické výstupy téměř stejnou pravděpodobnost a počáteční vektory procesu se tedy čím dál víc podobají uniformnímu rozdělení na typické množině. Onu zdánlivou rovnoměrnost je ale třeba vnímat v logaritmické škále.

Všimněme si paradoxního faktu, že typické výstupy jsou téměř jisté, ale početně naopak tvoří stále menší část všech výstupů, jak je vidět z jejich počtu. Podíl „typických výstupů“ délky n na všech výstupech je totiž zhruba

$$\frac{2^{n\mathcal{H}(X)}}{|A|^n} = 2^{n\left(\mathcal{H}(X)-\log|A|\right)}$$

a tedy exponenciálně rychle klesá k nule, s výjimkou procesu s entropií $\log|A|$. Ten odpovídá procesu nezávislých uniformních rozdělení, u kterého jsou typické *všechny* výstupy.

Stacionární proces

Standardním případem, kdy příspěvek jednotlivých symbolů konverguje, je **stacionární proces**, tedy proces, pro který platí

$$\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) = \mathbb{P}\left(X_{[k,n+k)} = u\right) \qquad k, n \in \mathbb{N},\ u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \in A^n.$$

Pro $k = 1$ dostáváme, že všechny veličiny stacionárního procesu mají stejné rozdělení. Všimněme si ovšem, že to pro stacionaritu procesu nestačí, uvažme např. proces $\left(Y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, kde $Y_{2i} = Y_{2i+1} = X_i$, kde $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je i.i.d. proces. Pak jsou všechna Y_n stejně rozdělená, ale existují dvě odlišná rozdělení pro vektory (Y_i, Y_{i+1}).

Tvrzení 4.7. *Nechť X je stacionární proces.*

(1) Pro všechna $k, m, \ell \in \mathbb{N}$, platí

$$s\left(P_{X_{[k..m)}}\right) = s\left(P_{X_{[k+\ell,m+\ell)}}\right), \qquad \mathcal{H}\left(X_{[k+\ell..m+\ell))}\right) = \mathcal{H}\left(X_{[k..m)}\right),$$

(2) posloupnost $\mathcal{H}\left(X_n \mid X_{[0..n)}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, je nerostoucí,

(3) entropie procesu $\mathcal{H}(X)$ je dobře definovaná a je rovna limitě

$$\mathcal{H}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\left(X_n \mid X_{[0..n)}\right).$$

Důkaz. Buď X stacionární proces $k, m, \ell \in \mathbb{N}$, $k < m$, $u \in A^{m-k}$. Z definice stacionarity dostáváme, že se pravděpodobnosti $\mathbb{P}\left(X_{[k,m)} = u\right)$ a $\mathbb{P}\left(X_{[k+\ell,m+\ell)} = u\right)$ rovnají. Z toho plyne

$$s\left(P_{X_{[k..m)}}\right) = s\left(P_{X_{[k+1..m+1)}}\right)$$

a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(X_{[k..m)}\right) &= \sum_{u\in s\left(P_{X_{[k..m)}}\right)} -\mathbb{P}\left(X_{[k,m)} = u\right) \log \mathbb{P}\left(X_{[k,m)} = u\right) \\ &= \sum_{u\in s\left(P_{X_{[k+\ell..m+\ell)}}\right)} -\mathbb{P}\left(X_{[k+\ell..m+\ell)} = u\right) \log \mathbb{P}\left(X_{[k+\ell..m+\ell)} = u\right) = \mathcal{H}\left(X_{[k+\ell..m+\ell)}\right).\end{aligned}$$

Tím je dokázáno (1). Z toho a z Tvrzení 3.36 dále dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(X_n \mid X_{[0..n)}\right) &\le \mathcal{H}\left(X_n \mid X_{[1..n)}\right) \\ &= \mathcal{H}\left(X_{[1..n+1)}\right) - \mathcal{H}\left(X_{[1..n)}\right) = \mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) - \mathcal{H}\left(X_{[0..n-1)}\right) \\ &= \mathcal{H}\left(X_{n-1} \mid X_{[0..n-1)}\right).\end{aligned}$$

Posloupnost $\mathcal{H}\left(X_n \mid X_{[0..n)}\right)$ je tedy nerostoucí a nezáporná, má tedy limitu a (3) plyne z Důsledku 4.3. □

I.i.d. procesy

Nejjednodušším případem, kterému se budeme věnovat, jsou **i.i.d. procesy** (independent and identically distributed), tedy posloupnosti, ve kterých mají všechny veličiny $X_i : \Omega \to A$ stejné rozdělení P a jsou nezávislé, neboli

$$\mathbb{P}\left(X_i = a\right) = \mathbb{P}\left(X_j = a\right) = P(a), \qquad i, j \in \mathbb{N}, a \in A$$

$$\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_i = u_i\right) = \prod_{i=0}^{n-1} P(u_i) \quad n \in \mathbb{N}, u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \in A^n.$$

Připomeňme, že takto definovaná nezávislost je silnější, než nezávislost po dvojicích. Viz Příklad 3.27, ve kterém jsou veličiny nezávislé po dvou, ale ne po třech.

Z nezávislosti (viz Tvrzení 3.6) okamžitě dostáváme

Lemma 4.8. *I.i.d. proces $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je stacionární a pro všechna i a n platí*

$$\frac{1}{n}\mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) = \mathcal{H}\left(X_i\right), \qquad \mathcal{H}(X) = \mathcal{H}\left(X_i\right).$$

Je-

Základní nástroj pro studium i.i.d. procesů je silný zákon velkých čísel, který připomínáme bez důkazu.

Věta 4.9 (Silný zákon velkých čísel)**.** *Buď $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. proces se společným rozdělením P a hodnotami v A, a buď $f : A \to \mathbb{R}$ libovolná funkce. Pak*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f(X_i) \to \mathbb{E}_P(f) \text{ s.j.}$$

Uvedený zákon se nazývá „silný“, protože v něm figuruje konvergence skoro jistě. Připomeňme, že v Kapitole 2 jsme definovali $\mathbb{E}_P(f)$ jako $\sum_{a\in s(P)} P(a)f(a)$. Vzhledem k předpokladu identického rozdělení navíc pro každé i platí

$$\mathbb{E}_P(f) = \mathbb{E}\left(f(X_i)\right).$$

Ze zákona velkých čísel jednoduše plyne, že i.i.d. procesy mají AEP.

Tvrzení 4.10. *Každý i.i.d. proces má silně asymptoticky rovnoměrné rozdělení.*

Důkaz. Nechť je $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. proces se společným rozdělením $P = P_{X_0}$. Zvolme v silném zákonu velkých čísel za f funkci definovanou na $a \in s(P)$ jako $-\log P(a)$. Pak $\mathbb{E}_P(f) = \mathcal{H}(X)$ a pro všechna i na $s\left(X_i\right)$ platí $f(X_i) = \mathfrak{T}_{X_i}$. Z nezávislosti pak na nosiči každého vektoru $X_{[0..n)}$ plyne

$$\frac{1}{n}\mathfrak{T}_{X_{[0..n)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{T}_{X_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i).$$

Zákon velkých čísel je tedy pro naše f jen jinou formulací konvergence z definice sAEP. □

Podívejme se blíže na to, jak vypadají prvky typické množiny i.i.d. procesu. Označme $P = P_{X_0}$ a předpokládejme $A = s(P)$ (uvažujme jen možné hodnoty). Pak máme

$$\mathcal{H}(P) = -\sum_{a \in A} P(a) \log P(a)$$

a pro slovo $u = u_0 \cdots u_{n-1} \in A^n$ platí díky nezávislosti X_i

$$\mathfrak{I}(u) = -\sum_{i=1}^{n} \log P(u_i) \; = -\sum_{a \in A} |u|_a \log P(u_a)\,,$$

kde $|u|$ značí délku slova u a $|u|_a$ značí počet výskytů znaku (neboli *písmene*) a ve slově u. Z toho je vidět, že slovo patří do typické množiny, pokud relativní četnost $\frac{|u|_a}{|u|}$ jednotlivých písmen v u odpovídá (zhruba) jejich pravděpodobnosti $P(a)$ (taková slova nazýváme **frekvenčně typická** pro rozdělení P). To dává pojmu „typická množina“ další intuitivní smysl, který je navíc úzce propojen se zákonem velkých čísel: slovo je prvkem typické množiny, pokud v něm jsou frekvence výskytu písmen blízké očekávání; taková slova se navíc objevují nejčastěji.

Několik varování:

- V typické množině se nemusejí vyskytovat jen frekvenčně typická slova. Očekávaný informační obsah lze dosáhnout i jinak.
- Slova z typické množiny se objevují nejčastěji, ale početně (obvykle) tvoří velmi malou část všech výstupů (viz výše).
- Typické slovo nemá samo o sobě maximální pravděpodobnost. Uvědomme si, že nejpravděpodobnějším slovem ze všech je posloupnost opakujícího se nejpravděpodobnějšího písmene. Takové slovo je ovšem jen jedno a pravděpodobnost, že se objeví, je tedy mizivá. Každé jednotlivé slovo z typické množiny je sice také málo pravděpodobné, vysoce pravděpodobné ovšem je, že se objeví *nějaké* slovo z typické množiny.

Příklad 4.11. Uvažujme rozdělení na čtyřpísmenné abecedě $A = \{a, b, c, d\}$, kde

$$P_Y(a) = P_Y(b) = \frac{1}{8}, \quad P_Y(c) = \frac{1}{4}, \quad P_Y(d) = \frac{1}{2}\,.$$

Frekvenčně typické slovo délky 8 obsahuje 1 áčko, 1 béčko, 2 céčka a 4 déčka. Celkový informační obsah takového slova je $1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$ bitů. To je očekávaná hodnota osmi kopií P_Y, protože

$$\mathcal{H}\left(P_Y\right) = \frac{1}{8}\log 8 + \frac{1}{8}\log 8 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{7}{4}\,.$$

Následující tabulka ukazuje ve druhém řádku počty slov s informačním obsahem uvedeným v prvním řádku. Ve třetím řádku je souhrnná pravděpodobnost slov s daným informačním obsahem. Pravděpodobnost jednotlivého slova u je z definice informačního obsahu rovna $2^{-\mathfrak{I}(u)}$.

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	8	44	168	518	1288	2716	4824	7393	9648	10 864	10 304	8288	5376	2816	1024	256
0.39	1.6	4.3	8.2	13.	16.	17.	15.	11.	7.4	4.1	2.0	0.79	0.26	0.067	0.012	0.0015

Další tabulka ukazuje složení množiny slov s očekávaným informačním obsahem 14. Je vidět, že se nejedná pouze o slova s typickou frekvencí $(1, 1, 2, 4)$, ačkoli ty tvoří největší skupinu.

{0, 0, 6, 2}	{0, 1, 4, 3}	{0, 2, 2, 4}	{0, 3, 0, 5}	{1, 0, 4, 3}	{1, 1, 2, 4}	{1, 2, 0, 5}	{2, 0, 2, 4}	{2, 1, 0, 5}	{3, 0, 0, 5}
28	280	420	56	280	840	168	420	168	56

Pokud za ε v definici typické množiny zvolíme $\frac{1}{8}$, dostanou se do ní všechna slova s informačním obsahem 13 až 15. Těch je zhruba 13.5%, ale jejich souhrnná pravděpodobnost je zhruba 48%.

Markovské procesy

Mírně složitější jsou **procesy markovské** (řádu jedna), které zobecňují pojem krátkého markovského řetězce ze závěru Kapitoly 3.4: závislost každé veličiny na dosavadním průběhu procesu lze v markovském procesu redukovat na závislost na bezprostředně předcházející veličině. Jsou to tedy procesy, které splňují podmínku

$$\mathbb{P}\left(X_n = a \mid X_{[0..n)} = u\right) = \mathbb{P}\left(X_n = a \mid X_{n-1} = u_{n-1}\right)$$

pro všechna $a \in A$, $n \geq 1$, $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \in A^n$ taková, že jevy v podmínce mají nenulovou pravděpodobnost. Jinými slovy,

$$X_{[0..n-1)} \to X_{n-1} \to X_n, \qquad n \geq 2.$$

Je-li navíc závislost X_{n+1} na X_n stejná pro všechna n, t.j. $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = b \mid X_n = a\right)$ je konstantní vzhledem k n pro všechna n, pro která je definovaná, mluvíme o **homogenním markovském procesu**. Takový proces je plně určen hodnotami $m_{a,b}$, $a, b \in A$, které určují pravděpodobnost toho, že X_{n+1} je rovno b, pokud je $X_n = a$. Tyto hodnoty tvoří čtvercovou matici M, která se nazývá **přechodovou maticí** markovského procesu. Je to tzv. **stochastická matice**, tedy matice jejíž každý řádek je **stochastický vektor**, tedy vektor nezáporných reálných čísel se součtem jedna. Jinak řečeno, stochastický vektor je pravděpodobnostní rozdělení (v našem případě na A) a stochastická matice je soubor takových rozdělení (v našem případě indexovaný opět množinou A). Snadno ověříme, že pro přechodovou matici M platí klíčový vztah

$$P_{X_{n+1}} = P_{X_n} \cdot M\,.$$

Mocniny přechodové matice M popisují podmíněné pravděpodobnosti dalších veličin na počátečním rozdělení a její vlastnosti tak určují vlastnosti procesu.

Všimněme si drobné technické komplikace: pokud je $\mathbb{P}\left(X_n = a\right)$ nulová, nemůžeme psát $m_{a,b} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = b \mid X_n = a\right)$. Proto jsme výše museli podmínku nenulové pravděpodobnosti stále opakovat. V krajním případě, kdy je $\mathbb{P}\left(X_n = a\right) = 0$ pro všechna n, je dokonce $m_{a,b}$ pro proces irelevantní. Zatímco tedy každá stochastická matice definuje spolu s X_0 jednoznačně markovský proces, jehož je přechodovou maticí, pro daný markovský proces může existovat přechodových maticí, které ho určují, více. Nejednoznačnost je právě v členech $m_{a,b}$, pokud je hodnota a v celém procesu nemožným jevem. Komplikaci s nedefinovanými podmíněnými pravděpodobnostmi lze opět obejít tím, že markovskou podmínku zapíšeme jako

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(X_n = a, X_{[0..n)} = u\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{n-1} = u_{n-1}\right)\\ =\ &\mathbb{P}\left(X_n = a, X_{n-1} = u_{n-1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right)\end{aligned}$$

a podmínku pro přechodovou matici jako

$$\mathbb{P}\left(X_n = b, X_{n-1} = a\right) = m_{a,b} \cdot \mathbb{P}\left(X_{n-1} = a\right).$$

Opakovaným použitím tohoto vztahu dostáváme

Lemma 4.12.

$$\mathbb{P}\left(X_{[n..n+k)} = u_0 u_1 \cdots u_{k-1}\right) = P_{X_n}(u_0) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} m_{u_{i-1},u_i}.$$

Homogenní markovský proces je výhodné chápat jako náhodnou procházku po grafu, jehož vrcholy reprezentují prvky z A a kde hrany jsou ohodnoceny podmíněnými pravděpodobnostmi $m_{a,b}$. Druhým klíčovým parametrem je **počáteční rozdělení** P_{X_0}, které určuje pravděpodobnosti, s jakými začínáme v konkrétním vrcholu grafu. Máme tedy randomizovaný start. Právě na této randomizaci záleží, zda bude celý proces stacionární. Pokud například přiřadíme jednomu vrcholu a_0 pravděpodobnost startu 1, dostaneme deterministický start, a ten (až na triviální výjimky) nepovede ke stacionárnímu procesu. Je snadné ověřit, že homogenní markovský proces je stacionární právě tehdy, když počáteční rozdělení $P = P_{X_0} \in \Delta_A$, splňuje podmínku

$$\sum_{a \in A} P(a) \cdot m_{a,b} = P(b)$$

pro všechna b, tedy $P \cdot M = P$, a stochastický vektor P je tedy vlastním vektorem stochastické matice $M = \left(m_{a,b}\right)_{a,b \in A}$. Takovému vektoru říkáme **stacionární (počáteční) rozdělení**. Pro stacionární homogenní markovský proces lze jednodušše určit entropii procesu.

Lemma 4.13. *Pro stacionární homogenní markovský proces $X = \left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a každé $i \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}\left(X_{i+1} \mid X_i\right), \qquad \mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) = \mathcal{H}\left(X_0\right) + (n-1) \cdot \mathcal{H}(X).$$

Důkaz. Z řetězového pravidla dostáváme, že

$$\mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) = \mathcal{H}\left(X_0\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}\left(X_i \mid X_{[0..i)}\right),$$

kde markovská vlastnost $X_{[0..i-1)} \to X_{i-1} \to X_i$ a stacionarita dává pro členy sumy vše potřebné:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(X_i \mid X_{[0..i)}\right) &= \mathcal{H}\left(X_i \mid X_{i-1}\right) = \mathcal{H}\left(P_{X_i,X_{i-1}}\right) - \mathcal{H}\left(P_{X_{i-1}}\right) \\ &= \mathcal{H}\left(P_{X_1,X_0}\right) - \mathcal{H}\left(P_{X_0}\right) = \mathcal{H}\left(X_1|X_0\right).\end{aligned}$$

□

Na závěr se sluší poznamenat, že entropie existuje pro všechny homogenní markovské procesy, i ty nestacionární. Entropie takového procesu je pak rovna entropii stacionárního markovského procesu se stejnou přechodovou maticí. Takových ale může být více, a my se zde touto obecnější teorií nebudeme zabývat.

Markovské procesy - AEP

Také pro homogenní markovské procesy lze zformulovat obdobu zákona velkých čísel a AEP. My se zde zaměříme na jednoduchý případ, pro který již máme definovanou entropii, tedy na stacionární případ. Označme tedy společné rozdělení P_{X_i} jako P.

K tomu budeme navíc požadovat, aby byl tento markovský proces souvislý, neboli aby v přechodovém grafu existovala „nenulová“ cesta mezi každými dvěma pravděpodobnostně možnými stavy. Řekneme tedy, že markovský proces je **souvislý**, pokud je stacionární a homogenní a pokud pro každé dva stavy $a, b \in A$, pro které jsou $P(a)$ a $P(b)$ nenulové, existuje slovo $u = aub \in A^+$ takové, že $\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) > 0$ (kde n je délka aub).

Pro souvislé markovské procesy platí zákon velkých čísel v podobě analogické Větě 4.9. My ale pro jednoduchost vyslovíme zákon velkých čísel pro souvislé markovské procesy přímo ve formě, která sleduje výskyt digramů, tedy dvojic po sobě jdoucích symbolů. Ty odpovídají hranám v přechodovém grafu. Ze stacionarity a homogenity plyne, že příslušné rozdělení $P_{X_i,X_{i+1}}$ je stejné pro všechna i, označme ho P_2.

Tvrzení 4.14. *Je-li $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ souvislý markovský proces, pak pro každou funkci $f : A \times A \to \mathbb{R}$ platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(X_i, X_{i+1}\right) \to \mathbb{E}_{P_2}(f) \text{ s.j.}$$

Nyní můžeme pro souvislé markovské procesy dokázat silné AEP.

Tvrzení 4.15. *Je-li $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ souvislý markovský proces, pak má silně asymptoticky rovnoměrné rozdělení.*

Důkaz. Nechť je $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ souvislý markovský proces. Definujme reálnou funkci f na $s\left(P_2\right)$ předpisem

$$f(a,b) = -\log m_{a,b},$$

kde $m_{a,b}$ je přechodová pravděpodobnost daná homogenitou procesu, tedy $m_{a,b} = \mathbb{P}\left(X_{i+1} = b \mid X_i = a\right)$, pro každé $i \in \mathbb{N}$. Na nosiči (X_i, X_{i+1}) tedy platí $f(X_i, X_{i+1}) = \mathfrak{I}_{X_{i+1}|X_i}$, a tedy $\mathbb{E}_{P_2}(f) = \mathcal{H}\left(X_{i+1} \mid X_i\right)$, což je rovno $\mathcal{H}(X)$.

Pro $\omega \in s\left(X_{[0..n)}\right)$ označme $u = X_{[0..n)}(\omega) \in A^n$. Pak z Lemmatu 4.12 plyne

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}(\omega) &= -\log \mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) = -\log P_{X_0}(u_0) + \sum_{i=1}^{n-1} -\log m_{u_{i-1},u_i} \\ &= \mathfrak{I}_{X_0}(\omega) + \sum_{i=0}^{n-2} f\left(X_i(\omega), X_{i+1}(\omega)\right).\end{aligned}$$

Podělením přes n,

$$\frac{1}{n}\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}(\omega) = \frac{1}{n}\mathfrak{I}_{X_0}(\omega) + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2} f\left(X_i(\omega), X_{i+1}(\omega)\right)\right).$$

Dle zákona velkých čísel pro markovský proces jde pravá strana skoro jistě k $\mathbb{E}_{P_2}(f) = \mathcal{H}(X)$, což jsme chtěli ukázat.

□

Přechodový graf a nestacionární procesy (nepovinné)

Nejčastější způsob, jak poznat souvislost markovského procesu je zvážení vlastností **přechodového grafu**, který je určen přechodovou maticí M. Upřesněme, že se jedná o ohodnocený graf, kde vrcholy jsou stavy markovského procesu, tedy množina A a ohodnocení hrany (a, b) je rovno $M_{a,b}$, přičemž hrany s nulovou vahou neuvažujeme. Potom platí jednoduché pozorování.

Tvrzení 4.16. *Nechť $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je stacionární homogenní markovský proces s přechodovou maticí M. Pokud je přechodový graf odvozený z matice M silně souvislý, pak je i proces souvislý.*

Získali jsme tedy grafové kritérium pro souvislost procesu. Toto kritérium je zároveň možno použít pro formulaci AEP i pro nestacionární procesy.

Věta 4.17. *Nechť $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je homogenní markovský proces s přechodovou maticí M. Pokud je přechodový graf odvozený z matice M silně souvislý, pak proces má entropii i silně asymptoticky rovnoměrné rozdělení.*

Důkaz již vyžaduje hlubší pochopení markovských procesů, a proto ho zde neuvádíme. Podobně bez důkazu uvádíme způsob, jak entropii daného procesu získat.

Tvrzení 4.18. *Nechť $X = \left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je homogenní markovský proces s přechodovou maticí $\boldsymbol{M}$. Nechť je přechodový graf odvozený z matice $\boldsymbol{M}$ silně souvislý. Pak pro matici přechodu $\boldsymbol{M}$ existuje jediné stacionární počáteční rozdělení $p = (p_a)_{a\in A}$. Entropie procesu X je pak rovna entropii stacionárního homogenního markovského procesu Y s počátečním rozdělením $P_{Y_0} = p$ a maticí přechodu $\boldsymbol{M}$. Platí tedy*

$$H(X) = H(Y) = H(Y_1|Y_0).$$

5 Komprese dat

Kódy

Buď M nějaká množina zpráv, které chceme přenášet nějakým kanálem, případně množina dat, která chceme někde ukládat. K tomu musíme M nejprve zakódovat do symbolů, která jsou pro přenos nebo zápis vhodné.

Důležitý je případ, kdy M je množina všech (neprázdných) posloupností symbolů z nějaké množiny A. Takové posloupnosti obvykle nazýváme **slova** a množinu A **abeceda**. Množina slov délky n nad abecedou A je A^n, množinu všech neprázdných slov (tedy slov délky alespoň jedna) značíme A^+. Pokud uvažujeme i prázdné slovo, které značíme ε, píšeme A^*. Důležitá pro nás bude neostré částečné uspořádání slov pomocí **relace prefix**. Pokud je tedy u prefixem v, budeme psát $u \leq v$.

Je-li M množina zpráv, zobrazení $f : M \to B^+$ nazýváme **kód** a obrazy f nazýváme **kódová slova**. Je-li f kód na abecedě A, pak jeho **blokové rozšíření** je zobrazení $f^* : A^+ \to B^+$ definované předpisem

$$f^*(a_1 a_2 \dots a_n) := f(a_1) f(a_2) \dots f(a_n).$$

Zobrazení f^* je rovněž kód, tentokrát na množině zpráv A^+. Kód na A^+, který je blokovým rozšířením svých hodnot na abecedě A (či přesněji na slovech délky jedna, která ovšem obvykle s písmeny ztotožňujeme), nazýváme **blokovým kódem**. Samozřejmě, ne každý kód na A^+ je blokový. Kód f na A nazýváme **jednoznačně dekódovatelným**, pokud je jeho blokové rozšíření prosté (na A^+).

Kód f se nazývá **prefixový**, pokud obraz žádné zprávy není prefixem obrazu jiné zprávy. Prefixový kód je tedy zejména prostý. Není těžké nahlédnout, že každý prefixový kód je i jednoznačně dekódovatelný. Pro prosté f je situace složitější, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 5.1. Kód $f_1 : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}^*$, definovaný jako

$$a \mapsto 0 \qquad b \mapsto 01 \qquad c \mapsto 10,$$

je prostý, ale není jednoznačně dekódovatelný, protože $f_1^*(ac) = f_1^*(ba) = 010$. Kódové slovo 010 nelze jednoznačně dekódovat. Kód f_1 tedy také není prefixový. Jak je vidět i z rovnosti $f_1^*(ac) = f_1^*(ba)$, obrazy $f_1(a)$ a $f_1(b)$ jsou prefixově srovnatelné.

Kód $f_2 : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}^*$, definovaný jako

$$a \mapsto 0 \qquad b \mapsto 01 \qquad c \mapsto 11,$$

také není prefixový, ale jak f_2, tak f_2^* jsou prosté, jak lze snadno ověřit pokusem o konstrukci kódového slova, které by nemělo jednoznačný vzor. Dekódování f_2^* je přesto velmi nepraktické, protože všechna kódová slova ac^n a bc^k jsou prefixově srovnatelná. Musíme tedy čekat na konec celého přenosu, abychom zjistili první písmeno zprávy.

Poznámka: Na slovech je přirozeně definována (asociativní) operace zřetězení, která slovům u a v přiřazuje slovo uv. S touto operací tvoří A^+ volnou pologrupu (resp. A^* volný monoid) s bází tvořenou slovy délky jedna. Blokové rozšíření f^* lze pak stručně definovat jako homomorfismus monoidů $A^* \to B^*$.

V literatuře se často „kódem“ rozumí přímo množina kódových slov, navíc obvykle pouze pokud je f^* prosté, tedy pokud je f jednoznačně dekódovatelné. Bez zmínky o zobrazení, pouze v termínech abecedy B, to lze vyjádřit slovy, že kódová slova nesplňují žádnou netriviální rovnost.

Existence prefixových kódů

Základním požadavkem na kódy je jejich jednoznačná dekódovatelnost, druhým kritériem je co nejkratší výstup. Mezi jednoznačně dekódovatelnými kódy navíc preferujeme prefixové kódy, které mají malé dekódovací zpoždění (viz Příklad 5.1). Prozkoumejme nejprve kombinatorické podmínky pro existenci prefixových kódů.

Prefixové kódy je možné snadno znázornit pravidelným orientovaným stromem stupně $D := |B|$ s hranami popsanými písmeny, jehož kořenem je prázdné slovo, každý vrchol reprezentuje slovo popisující cestu z kořene a kódová slova jsou reprezentována listy. Je-li $f : M \to B^+$ prefixový kód s nejdelším kódovým slovem délky L, má příslušný strom hloubku L. Vrchol odpovídající kódovému slovu délky ℓ vzhledem k prefixovosti „blokuje“ všechny své následníky, zejména všechna svá prodloužení délky ℓ, kterých je $D^{L-\ell}$. Z toho prostým počítáním listů a po následném vydělení D^L plyne, že pro prefixový kód f musí platit

$$\sum_{a \in M} D^{-|f(a)|} \leq 1\,,$$

což je tzv. **Kraftova nerovnost**, která ovšem podle následující věty platí i pro jednoznačně dekódovatelné kódy.

Tvrzení 5.2 (McMillanova nerovnost)**.** *Nechť je $f : A \to B^+$ jednoznačně dekódovatelný kód. Pak platí Kraftova nerovnost.*

Důkaz. Pro každé $u \in A^+$ označme $\rho(u) = D^{-|u|}$ a rozšiřme toto značení aditivně na množiny:

$$\rho(S) = \sum_{u \in S} \rho(s).$$

Zobrazení ρ, které vystupuje v Kraftově nerovnosti, vyjadřuje jakousi „hustotu“ množiny S. Zejména pro slova stejné délky k platí

$$\rho\left(S \cap B^k\right) \leq 1,$$

což je podíl množiny slov z S na množině všech slov z B^k. Je-li délka slov z S nejvýše L, platí tedy také

$$\rho\,(S) \leq L. \qquad (\diamond)$$

Pro ρ navíc platí $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$, tedy zejména pro každé $a_1 \cdots a_k \in A^k$ také

$$\rho\left(f^*(a_1 \cdots a_k)\right) = \prod_{i=1}^{k} \rho\left(f(a_i)\right). \qquad (\spadesuit)$$

Věta, kterou dokazujeme, tvrdí, že $\rho(f(A)) \leq 1$. Postupujme sporem a předpokládejme $\rho(f(A)) > 1$. Označme ℓ délku nejdelšího slova z $f(A)$. Buď n dostatečně velké číslo, aby platilo $(\rho(f(A)))^n > n\ell$, a uvažujme množinu $f^*(A^n)$ všech kódových slov, která vzniknou jako obrazy zpráv délky n. Délka těchto kódových slov je nejvýše $n\ell$. Podle ($\diamond$) platí

$$n\ell \geq \rho\left(f^*(A^n)\right) = \sum_{u \in A^n} \rho\left(f^*(u)\right) = (\rho(f(A)))^n > n\ell,$$

kde první rovnost je důsledkem předpokladu jednoznačné dekódovatelnosti: na levé straně rovnosti totiž sčítáme hustoty přes množinu obrazů, na pravé straně přes množinu vzorů; pokud by f^* nebylo na A^n prosté, platila by ostrá nerovnost $<$. Druhá rovnost plyne z ($\spadesuit$) po dosazení definice $\rho(f(A))$ a roznásobení sum.

Dostali jsme spor. □

Příklad 5.3. Uvažujme kódy f_1 a f_2 z Příkladu 5.1. U obou dostáváme Kraftovu sumu rovnu jedné. Je-li tedy Kraftova nerovnost splněna, o tom, zda je kód jednoznačně dekódovatelný nám to nic neříká.

Uvažme nyní kód f_4, definovaný na $A = \{a, b, c, d\}$ jako

$$a \mapsto 0 \qquad b \mapsto 01 \qquad c \mapsto 10 \qquad d \mapsto 11.$$

Kraftova suma je nyní $\rho\left(f_4(A)\right) = \frac{5}{4}$, a kód tedy podle McMillanovy-Kraftovy nerovnosti nemůže být jednoznačně dekódovatelný. Ilustrujme na tomto příkladu myšlenku důkazu Tvrzení 5.2. Pro $n = 16$ platí

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{16} = \sum_{u \in A^{16}} \rho\left(f^*(u)\right) > 32.$$

Protože slova z $f^*\left(A^{16}\right)$ mají délku nejvýše 32, existuje alespoň jedna délka $1 \leq d \leq 32$, pro kterou je

$$\sum_{|f(w)|=d} \rho\left(f^*(w)\right) = \sum_{|f(w)|=d} \frac{1}{2^d} > 1.$$

Existuje tedy více než 2^d slov w která f_4^* zobrazuje na binární slova délky d. Zobrazení f_4^* tedy není prosté.

Jako u většiny početních argumentů, je i zde odhad velmi hrubý a velkorysý. Všimněme si například, že výpočet nebere v úvahu fakt, že neexistují žádné obrazy délky méně než 16. Bližším výpočtem lze ověřit, že obrazů délky 26 je více než

sedmkrát víc, než je binárních slov této délky. Lze též snadno ověřit, že existuje 270 obrazů délky osm, takže již na slovech této délky lze uplatnit jemnější početní argument, podle nějž jakýkoli binární kód s délkami $(1, 2, 2, 2)$ má nejednoznačné dekódovatelné slovo délky osm. Ve skutečnosti však z kombinatorické analýzy snadno plyne, že kolize nastává nejpozději na slově délky tři (obrazu slova délky dva).

Přestože je argument takto velkorysý, samotná mez je přesná, jak uvidíme v následujícím tvrzení.

Pro dané slovo u a přirozené číslo $n \geq |u|$, označíme $[u]_n^B$ množinu všech slov délky n nad abecedou B, které jsou prodloužením slova u, t.j. sovo u je jejich prefixem (index pro abecedu budeme vynechávat, pokud bude jasná z kontextu). Tato slova odpovídají listům ve stromě hloubky n, které u „blokuje“. Mohutnost $[u]_n^B$ je $D^{n-|u|}$, kde $D = |B|$.

Tvrzení 5.4 (Existence prefixového kódu)**.** *Pokud soubor přirozených čísel ℓ_a, $a \in A$ splňuje Kraftovu nerovnost, tedy*

$$\sum_{a \in A} D^{-\ell_a} \leq 1,$$

pro $D = |B|$, pak existuje prefixový kód $f : A \to B^*$ splňující $|f(a)| = \ell_a$, $a \in A$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme konstrukcí požadovaného kódu. Nejprve seřadíme prvky A do posloupnosti a_1, a_2 až a_n tak, aby délky $\ell_i := \ell_{a_i}$ byly seřazeny vzestupně. Popíšeme nyní induktivní proces volby kódových slov. Předpokládejme, že máme prefixový kód f dobře definovaný na prvcích a_1, a_2, .., a_k, $k < n$, a chceme ho rozšířit na prvek a_{k+1} tak, aby byl stále prefixový. K tomu stačí zvolit slovo délky $\ell := \ell_{k+1}$, které není prodloužením žádného z dosud zvolených obrazů f, ani není žádnému z nich rovno. Pro „zakázané“ množiny slov $f(a_i)$, $i \leq k$ délky ℓ platí

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} \left[f(a_i) \right]_\ell^B \right| = \sum_{i=1}^{k} \left| \left[f(a_i) \right]_\ell^B \right| = \sum_{i=1}^{k} D^{\ell - \ell_i} < \sum_{a \in A} D^{\ell - \ell_a} = D^\ell \sum_{a \in A} D^{-\ell_a} \leq D^\ell .$$

Z ostré nerovnosti plyne, že hledané slovo $u \in B^\ell$, které nenáleží žádné z množin $\left[f(a_i) \right]_\ell^B$, $i \leq k$, existuje. Toto slovo zároveň není prefixem žádného předchozího kódového slova, neboť z nich má maximální délku. Volbou $f(a_{k+1}) := u$ tedy opět dostáváme prefixový kód s požadovanými délkami. □

Zdůrazněme, že důkaz existence kódu v předchozím tvrzení je konstruktivní. Deterministická konstrukce může volit mezi kandidáty nejmenší slovo v nějakém předem daném uspořádání slov (například lexikografickém).

Tvrzení 5.2 a Tvrzení 5.4 ukazují, že volbou prefixových kódů nic neztrácíme.

Důsledek 5.5. *Pro každý jednoznačně dekódovatelný kód existuje prefixový kód se stejnými délkami kódových slov.*

Kompresní poměr

Na kódech na stejné množině zpráv M definujme dvě částečná uspořádání: prefixové a délkové. Budeme psát

- $f \leq_p f'$, pokud $f(m) \leq f'(m)$ pro každé $m \in M$,
- $f \leq_\ell f'$, pokud $|f(m)| \leq |f'(m)|$ pro každé $m \in M$.

Platí-li $|f(x)| = |f'(x)|$ pro všechna $X \in M$, píšeme $f \sim_\ell f'$.

V souvislostí s kompresí nás zajímají kódy s co nejkratšími obrazy, přičemž rozhodujícím měřítkem bude *průměrná* délka zprávy, což poukazuje na to, že zprávy jsou hodnotami nějaké náhodné veličiny $X : \Omega \to M$, resp. že na množině M je definované nějaké pravděpodobnostní rozdělení.

V případě konečné množiny M nás bude zajímat **střední délka kódu**

$$\mathbb{E}\left(|f(X)|\right) = \sum_{a \in M} P_X(a) \cdot |f(a)|\,,$$

kterou se budeme snažit minimalizovat a kterou označíme $[\![f]\!]_X$.

Definice 5.6. *Řekneme, že kód $f : M \to B^+$ je pro danou náhodnou veličinu $X : \Omega \to M$ **optimální** pokud*

- *je jednoznačně dekódovatelný;*
- *pro každý jednoznačně dekódovatelný kód $f' : M \to B^+$ je $[\![f]\!]_X \leq [\![f']\!]_X$; a*
- *pokud $f' \leq_\ell f$ je jednoznačně dekódovatelný, pak $f' \sim_\ell f$.*

Pro každé X s hodnotami v konečné množině existuje (alespoň jeden) optimální kód. Před důkazem tohoto tvrzení, upozorněme na technickou komplikaci spojenou se zprávami mimo nosič P_X. Tyto „nemožné“ zprávy bychom mohli z M vyloučit, ale to by komplikovalo úvahy např. ve chvíli, kdy chceme pro pevné M uvažovat všechna možná rozdělení. Přítomnost nemožných zpráv nemění střední délku kódu, ale ovlivňuje např. požadavek, aby byl kód jednoznačně dekódovatelný nebo prefixový, což se vztahuje na všechna kódová slova. To vysvětluje třetí požadavek v definici optimálního kódu: optimálními by jinak byly i kódy se zbytečně dlouhými kódovými slovy mimo nosič, což nechceme.

Lemma 5.7. *Mějme náhodnou veličinu X s hodnotami v konečné množině M. Pak existuje optimální kód $f : M \to B^+$ pro X. Existuje také optimální kód pro X, který je navíc prefixový.*

Důkaz. Jistě pro X existuje alespoň jeden jednoznačně dekódovatelný kód, čímž získáváme horní odhad pro $[\![f]\!]_X$ optimálního kódu. Pro každé $a \in s\left(P_X\right)$ tak máme horní odhad na délku $f(a)$. Vybíráme tedy z konečné množiny možných délek kódových slov, přičemž tyto délky vždy již určují průměrnou délku kódu. Můžeme

tedy vybrat ty délky, která splňují Kraftovu nerovnost a poskytují nejmenší střední délku. V případě, že existují zprávy mimo nosič, musíme požadovat, aby Kraftova nerovnost platila ostře. Pro zprávy mimo nosič pak opět vybereme minimální délky zaručující (tentokrát již neostrou) Kraftovu nerovnost.

Pro zvolené délky můžeme podle Tvrzení 5.4 najít prefixový kód, který má podle konstrukce minimální délku a žádné slovo nelze zkrátit, aniž by se porušila Kraftova nerovnost a tedy i jednoznačná dekódovatelnost. □

Lemma 5.8. *Je-li f optimální kód pro X, pak pro žádné $a, b \in M$ neplatí současně $P_X(a) < P_X(b)$ a $|f(a)| < |f(b)|$.*

Důkaz. Pokud by pro nějaký pár a, b nastala zakázaná situace, stačilo by vyměnit kódová slova, čímž by se snížila střední délka kódu o

$$\big(P_X(a) - P_X(b)\big)\,(|f(a)| - |f(b)|)\,.$$

□

Pro zavedená tři uspořádání na kódech platí následující zřejmé vztahy:

Lemma 5.9.

(1) Pokud $f \leq_p f'$, pak $f \leq_\ell f'$.

(2) Pokud $f \leq_\ell f'$, pak $\underline{[\![f]\!]}_X \leq \underline{[\![f']\!]}_X$ a $\overline{[\![f]\!]}_X \leq \overline{[\![f']\!]}_X$. Pokud $[\![f]\!]_X$ i $[\![f']\!]_X$ existují, pak také $[\![f]\!]_X \leq [\![f']\!]_X$.

(3) Pokud $f \sim_\ell f'$, pak v bodě (2) platí rovnosti.

Jako dosud budeme písmenem D označovat mohutnost výstupní abecedy. Tato abeceda bude konečná a netriviální, tedy **minimálně dvouprvková** ($D \geq 2$). Entropii a divergenci pak bude vhodné měřit „D“-itech, tedy zavedeme

$$\mathcal{H}_D(X) = \sum_{a \in s(P_X)} P_X(a)\left(-\log_D P_X(a)\right), \qquad \mathcal{D}_D(P \parallel Q) = \sum_{a \in s(P)} P(a) \log_D \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Tedy $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}_2(X)$ a $\mathcal{D}(P \parallel Q) = \mathcal{D}_2(P \parallel Q)$. Jistě platí

$$\mathcal{H}_D(X) = \frac{\mathcal{H}(X)}{\log D}, \qquad \mathcal{D}_D(P \parallel Q) = \frac{\mathcal{D}(P \parallel Q)}{\log D}.$$

Následující tvrzení je první, které uvádí kompresi do již několikrát ohlašované souvislosti s entropií.

Tvrzení 5.10. *Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v konečné množině M a f je jednoznačně dekódovatelný kód $f : M \to B^+$. Potom je střední délka kódu zdola odhadnuta entropií:*

$$[\![f]\!]_X \geq \mathcal{H}_D(X)\,.$$

Rovnost nastává právě tehdy když $P_X(a) = D^{-|f(a)|}$, $a \in M$.

Důkaz. Označme $\ell_a = |f(a)|$, $c = \sum_{a \in s(P_X)} D^{-\ell_a}$ a definujme rozdělení $Q \in \Delta_A$ předpisem

$$Q(a) = \begin{cases} \frac{D^{-\ell_a}}{c}, & a \in s\left(P_X\right) \\ 0, & a \notin s\left(P_X\right). \end{cases}$$

Jelikož mají P_X a Q stejné nosiče, můžeme rozdíl obou stran nerovnosti zapsat následovně:

$$\begin{aligned} [\![f]\!]_X |f(X)| - \mathcal{H}_D(X) &= \sum_{a \in s(P_X)} P_X(a) \left(|f(a)| + \log_D P_X(a)\right) \\ &= \sum_{a \in s(P_X)} P_X(a) \left(-\log_D(cQ(a)) + \log_D P_X(a)\right) \\ &= -\log_D c + \mathcal{D}_D(P_X \parallel Q) \geq 0. \end{aligned}$$

Z McMillanovy nerovnosti dostáváme, že $c \leq 1$, tedy $-\log c$ je nezáporný. Dokázali jsme požadovanou nerovnost.

Pokud platí $P_X(a) = D^{-|f(a)|}$, pro $a \in M$, pak lze pouhým dosazením ověřit rovnost entropie a střední délky kódu. Naopak, pokud je střední délka kódu rovna entropii musí být $c = 1$ a $\mathcal{D}(P_X \parallel Q) = 0$. Z toho plyne $P_X(a) = Q(a) = D^{-|f(a)|}$ pro každé $a \in s\left(P_X\right)$. Zároveň dostáváme, že $s\left(P_X\right)$. Jinak by totiž součet $\sum_{a \in M} D^{-\ell_a}$ byl ostře větší než $c = 1$ a to by byl spor s McMillanovou nerovností. □

Shannonův kód

Následující tvrzení poskytuje první horní odhad na střední délku kódu.

Tvrzení 5.11. *Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v konečné množině M. Potom existuje prefixový kód $f : s\left(P_X\right) \to B^+$, pro který platí $|f(a)| = \lceil -\log_D P_X(a) \rceil$, $a \in s\left(P_X\right)$, a*

$$[\![f]\!]_X < \mathcal{H}_D(X) + 1.$$

Důkaz. Položme $\ell_a = \lceil -\log_D P_X(a) \rceil$, pro $a \in s\left(P_X\right)$. Potom

$$\sum_{a \in s(P_X)} D^{-\ell_a} \leq \sum_{a \in s(P_X)} P_X(a) = 1.$$

Existuje tedy prefixový kód s danými délkami kódových slov. Pro takový kód platí

$$[\![f]\!]_X = \sum_{a \in s(P_X)} P_X(a) \cdot \ell_a < \sum_{a \in s(P_X)} P_X(a) \left(-\log_D P_X(a) + 1\right) = \mathcal{H}_D(X) + 1.$$

□

Každý kód splňující podmínky z předchozího tvrzení se nazývá **Shannonův**. Přesněji o takovém kódu řekneme, že je to Shannonův kód pro náhodnou veličinu X (pokud není výstupní abeceda B daná z kontextu, musíme specifikovat i ji).

Tvrzení 5.12. *Je-li $f : s\left(P_X\right) \to B^+$ Shannonův kód pro náhodnou veličinu X, jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) $[\![f]\!]_X = \mathcal{H}_D(X)$

(2) $|f(a)| = -\log_D(P_X(a)) \in \mathbb{N}$, $a \in s\left(P_X\right)$,

(3) $-\log_D(P_X(a)) \in \mathbb{N}$, $a \in s\left(P_X\right)$,

(4) $\sum_{a \in s\left(P_X\right)} D^{-|f(a)|} = 1$.

Důkaz. Dle Tvrzení 5.10, jsou podmínky (1) a (2) ekvivalentní pro obecný kód. Ekvivalence podmínky (3) s podmínkou (2) vyplývá přímo z definice Shannonova kódu. Z definice Shannonova kódu také plyne, že každý sčítanec $D^{-|f(a)|}$ je shora omezen hodnotou $P_X(a)$. Součet tedy bude jedna, což je rovno $\sum P_X(a)$, právě když budou sčítance přímo rovny příslušné pravděpodobnosti (jinak bude součet ostře menší), což dokazuje ekvivalenci (2) a (4). □

Tvrzení 5.13. *Nechť je X náhodná veličina s hodnotami v konečné množině M a nechť B je abeceda mohutnosti D. Potom existuje prefixový kód $f : s\left(P_X\right) \to B^+$ takový, že $[\![f]\!]_X = \mathcal{H}_D(X)$, právě když $-\log_D(P_X(a)) \in \mathbb{N}$, $a \in s\left(P_X\right)$. Takový kód pak bude mít nejmenší střední délku kódu, bude Shannonův a bude pro něj platit $|f(a)| = -\log_D(P_X(a))$, $a \in s\left(P_X\right)$.*

Důkaz. Věta je důsledkem předchozích vět. □

Shannonův kód je vytvořen pro konkrétní veličinu. Následující věta ukazuje, že pro jinou veličinu může být, a povětšinou je, krajně neoptimální.

Tvrzení 5.14. *Nechť X, Y je náhodná veličina s hodnotami v konečné množině M a $f : s\left(P_Y\right) \to B^+$ je Shannonův kód pro veličinu Y. Pokud je $s\left(P_X\right) \subseteq s\left(P_Y\right)$, platí*

$$\mathcal{H}_D(X) + \mathcal{D}_D(P_X \parallel P_Y) \leq [\![f]\!]_X.$$

Důkaz. Rozdíl dvou členů z opačných stran nerovnosti zapíšeme pomocí divergence:

$$\begin{aligned}
[\![f]\!]_X - \mathcal{H}_D(X) &= \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a)\left(|f(a)| + \log_D P_X(a)\right) \\
&\geq \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a)\left(-\log_D P_Y(a) + \log_D P_X(a)\right) \\
&= \mathcal{D}_D(P_X \parallel P_Y).
\end{aligned}$$

□

Na závěr ještě ukážeme, že se dá Shannonův kód dobře rozšířit i mimo nosič náhodné veličiny, aniž bychom ztratili omezení na střední délku kódu.

Tvrzení 5.15. *Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v konečné množině M. Potom existuje prefixový kód $f : M \to B^+$, pro který platí*

$$[\![f]\!]_X < \mathcal{H}_D(X) + 1.$$

Důkaz. Vezměme Shannonův kód $f : s\left(P_X\right) \to B^+$ a označme $\ell_a = |f(a)|$, $a \in s\left(P_X\right)$. Pro ten je nerovnost splněna. Pokud je $\sum_{a \in s\left(P_X\right)} D^{-\ell_a} < 1$, můžeme najít dostatečná velká ℓ_a, $a \in M \setminus s\left(P_X\right)$, taková, že $\sum_{a \in M} D^{-\ell_a}$ je stále menší než jedna. Dle Tvrzení 5.4 existuje prefixový kód $f' : M \to B^+$ takový, že $\ell_a = |f(a)|$ pro všechna $a \in M$. Jelikož se délky kódových slov pro f a f' shodují na $s\left(P_X\right)$, mají stejnou střední délku kódu a nerovnost platí i pro f'.

Pokud je $\sum_{a \in s\left(P_X\right)} D^{-\ell_a} = 1$, dostáváme z Tvrzení 5.12, že $[\![f]\!]_X = \mathcal{H}_D(X)$. Vezměme prvek $c \in s\left(P_X\right)$ (pokud chceme co nejmenší střední hodnotu, volme tak, aby $|f(c)|$ bylo maximální). Platí $P_X(c) = D^{-|f(c)|} \leq D^{-1} < 1$. Definujme $\ell'_c = \ell_c + 1$ a $\ell'_a = \ell_a$, pro $a \in s\left(P_X\right)$ různá od c. Potom platí $\sum_{a \in s\left(P_X\right)} D^{-\ell'_a} < 1$ a opět lze najít čísla ℓ'_a, $a \in M \setminus s\left(P_X\right)$ taková, že existuje prefixový kód f' na M s délkami slov ℓ'. Pro takový kód platí

$$[\![f']\!]_X = \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot \ell'_a = \sum_{a \in s\left(P_X\right)} P_X(a) \cdot \ell_a + P_X(a') \cdot 1 < \mathcal{H}_D(X) + 1.$$

□

Kontrolní otázka

- Ověřte, že Q v důkazu Tvrzení 5.10 je opravdu rozdělení.

Huffmanův kód - nejkratší binární prefixový kód

Podle Tvrzení 5.13 je Shannonův kód optimální ve speciální situaci, kdy logaritmy všech pravděpodobností jsou celočíselné. V obecné situaci horní odhad $\mathcal{H}_D(X) + 1$ pro jeho délku optimalitu nezaručuje, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 5.16. Rozdělení $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ má entropii

$$\mathcal{H}(P) = \log(3) + \frac{1}{3} \approx 1.918.$$

Záporné logaritmy pravděpodobností jsou $-\log P = (1.58, 1.58, 2.58, 2.58)$, takže délky pro Shannonův kód jsou $d = (2, 2, 3, 3)$. Tomu odpovídá například prefixový kód $g = (00, 01, 100, 101)$ s délkou

$$[\![g]\!]_P = \frac{7}{3} \approx 2.333.$$

Minimální kód pro P je ale například $f = (00, 01, 10, 11)$ s délkou

$$[\![f]\!]_P = 2 < [\![g]\!]_P.$$

Nyní popíšeme **Huffmanův algoritmus**, který konstruuje optimální prefixové kódy pro *binární* výstupní abecedu, tedy pro případ kdy $D = 2$. Zvolme $B = \{0, 1\}$. Algoritmus pracuje rekurzivně následujícím způsobem. Sloučí dvě písmena s nejmenší pravděpodobností do jediného nového písmene a získá tak rozdělení na menší abecedě. Potom sestrojí minimální kód pro tuto menší abecedu a z kódu složeného písmene získá kódy jeho dvou písmen tak že k němu přidá jeden rozlišovací bit. Viz pseudokód algoritmu níže. Algoritmus funguje očekávaným způsobem pro abecedy mohutnosti alespoň dva. Pro jednoprvkovou abecedu, připouštějící pouze triviální rozdělení s nulovou entropií, vrací algoritmus prázdné slovo (tedy „kód“ s nulovou střední délkou).

Algorithm 1: `Huffman`

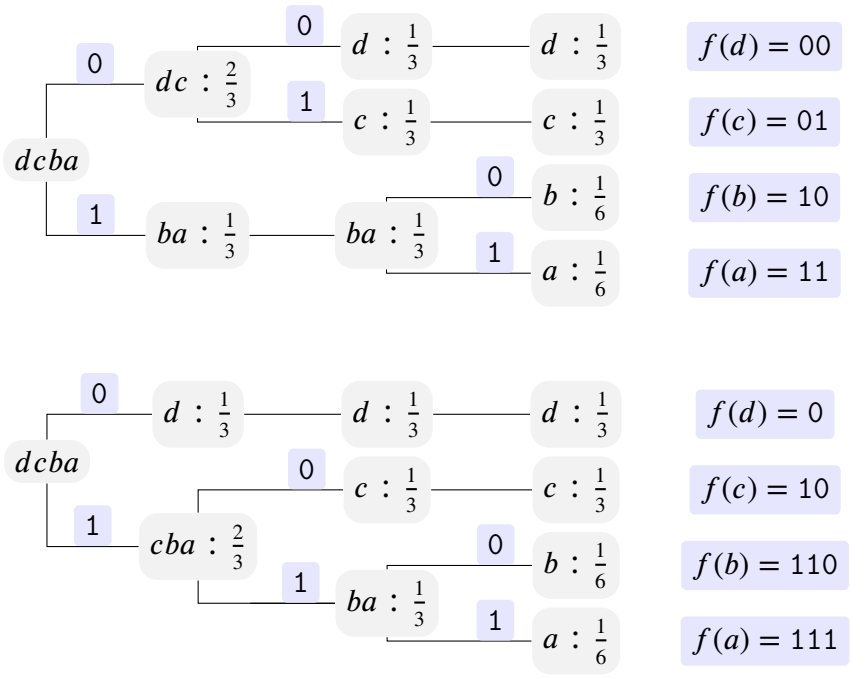
Data: P, M
Result: $f : M \to \{0, 1\}$
if $M = \{c\}$ **then**
  $g(c) = \varepsilon$;
else
  $a, b \leftarrow \arg\min_{x \neq y \in M} P(x) + P(y)$; `(* možná nejednoznačnost *)`
  $C \leftarrow M \setminus \{a, b\} \cup \{c\}$; `(* c ∉ M *)`
  $$Q(x) \leftarrow \begin{cases} P(x), & x \in C,\ x \neq c \\ P(a) + P(b), & x = c \end{cases};$$
  $g \leftarrow$ `Huffman`(Q, C) ;
  $$f(x) \leftarrow \begin{cases} g(x), & x \in C \setminus \{c\}, \\ g(c)0, & x = a, \\ g(c)1, & x = b \end{cases}$$
end

Algoritmus není deterministický a zkonstruovaný **Huffmanův kód** tak není vždy určen jednoznačně, a to ani co do délek kódových slov. V případě, že někdy v průběhu Huffmanova algoritmu není dvojice písmen s nejmenšími pravděpodobnostmi jen jedna, vedou všechny alternativy k minimálnímu kódu. K této situaci dochází i v Příkladu 5.16 a dva možné kódy s minimální střední délkou jsou sestrojeny na Obrázku 7.

Pro správnost Huffmanova algoritmu jsou klíčová následující dvě lemmata.

Lemma 5.17. *Buď X náhodná veličina s hodnotami v alespoň dvouprvkové konečné množině M. Nechť $a, b \in M$, $a \neq b$, jsou písmena s nejmenší pravděpodobností, tedy nechť platí, že*

$$P_X(a) + P_X(b) \leq P_X(x) + P_X(y)$$



Obrázek 7: Dva Huffmanovy kódy pro rozdělení $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

pro libovolné $x, y \in M$, $x \neq y$. *Pak pro* X *existuje optimální a prefixový kód* $f : M \to B^+$ *takový, že*

$$\{f(a), f(b)\} = \{u0, u1\}$$

pro nějaké $u \in B^*$.

Důkaz. Pokud $|M| = 2$, pak $M = \{a, b\}$ a $f : a \mapsto 0, b \mapsto 1$ splňuje požadavky lemmatu.

Pokud $|M| \geq 3$, pak je maximální délka slova z kódu alespoň 2. Podle Lemmatu 5.7 existuje pro X optimální prefixový kód f'. Mezi písmeny s minimální pravděpodobností zvolme $a' \in M$, pro které je $|f'(a')|$ maximální. Z Lemmatu 5.8 plyne, že $|f'(a')|$ je maximální přes všechna kódová slova (nejen ta jejichž vzory mají minimální pravděpodobnost), a je tedy tvaru uc, kde $c \in B$ a u je neprázdné. Z prefixovosti kódu plyne, že mezi kódovými slovy není žádné, které by bylo prefixem slova u. Z délkové minimality plyne, že pokud zkrátíme kódové slovo $f'(a')$ na u, porušíme prefixovost kódu. To znamená, že u je prefixem nějakého dalšího kódového slova $f'(b')$. Z maximality délky $u'c$ plyne,že $f'(b') = uc'$ pro $c \neq c' \in B$.

Hledané f nyní definujeme pomocí f' záměnou písmen $a \leftrightarrow a'$ a $b \leftrightarrow b'$, neboli $f(a) = f'(a')$, $f(a') = f'(a)$, $f(b) = f'(b')$, $f(b') = f'(b)$ a $f(x) = f'(x)$ jinak. Předpokládejme, bez újmy na obecnosti, že $P_X(a) \leq P_X(b)$. Z minimality $P_X(a) + P_X(b)$ pak plyne $P_X(a) = P_X(a')$ a $P_X(b) \leq P_X(b')$. Rovněž platí $|f'(b)| \leq$

$|f'(b')|$ a $|f'(a)| \leq |f'(a')|$. Střední hodnota se tedy výměnou písmen nezvětší a f je optimální a prefixový kód s požadovanými vlastnostmi. □

Všimněme si, že pokud pro rozdělení z Příkladu 5.16 zvolíme optimální prefixový kód

$$a \mapsto \texttt{10}, \qquad b \mapsto \texttt{01}, \qquad c \mapsto \texttt{11}, \qquad d \mapsto \texttt{00},$$

pak neexistují žádná písmena a a b s vlastnostmi z předchozího lemmatu. Záměna $b \leftrightarrow b'$ v důkazu je nutná. To zejména znamená, že takový optimální kód nemůže být výstupem Huffmanova algoritmu.

Lemma 5.18. *Je-li výstupem Huffmanova algoritmu kód $f : M \to B^+$, pak v Kraftově nerovnosti platí rovnost, tedy*

$$\sum_{x \in M} 2^{-|f(x)|} = 1\,.$$

Důkaz. Postupujme indukcí podle velikosti M. Je-li $|M| = 1$, máme $2^{|\varepsilon|} = 1$.

Nechť je $|M| \geq 2$ a nechť g, c a C jsou jako v algoritmu. Pak

$$\sum_{x \in M} 2^{-|f(x)|} = 2^{-|g(c\texttt{0})|} + 2^{-|g(c\texttt{1})|} + \sum_{x \in C \setminus \{c\}} 2^{-|g(x)|} = \sum_{x \in C} 2^{-|g(x)|} = 1,$$

kde poslední rovnost je indukčním předpokladem. □

Nyní dokážeme správnost Huffmanova algoritmu.

Tvrzení 5.19. *Pro konečné $|M| \geq 2$ a náhodnou veličinu X s hodnotami v M vrací Huffmanův algoritmus prefixový a optimální kód pro X.*

Důkaz. Postupujme opět indukcí podle velikosti M. Je-li $M = \{a, b\}$ mohutnosti dva, pak Huffmanův algoritmus vrací kód $a \mapsto \texttt{0}$, $b \mapsto \texttt{1}$, který je zjevně optimální a prefixový.

Předpokládejme nyní $|M| \geq 3$. Ukažme, že (každý možný) výstup $f : M \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^+$ Huffmanova algoritmu je prefixový kód optimální pro X. Nechť a, b jsou písmena zvolená Huffmanovým algoritmem. Pro libovolné $x, y \in M$, $x \neq y$, tedy platí $P(a) + P(b) \leq P(x) + P(y)$. Buďte C, Q, c a g definovány jako v algoritmu. Tedy i f je definováno pomocí g jako v algoritmu. Pak $Q = P_{\alpha \circ X}$, kde $\alpha : M \to C$ přejmenovává a a b na nové písmeno c a jinde je identitou.

Z indukčního předpokladu plyne, že g je optimální a prefixový kód pro náhodnou veličinu $\alpha \circ X$. Z definic vidíme, že $g(\alpha(z)) \leq f(z)$ pro všechna $z \in M$. Ukažme, že f je prefixový (což je zřejmé i z pohledu na prefixový strom g):

Pokud jsou $f(x)$ a $f(y)$, $x \neq y$, prefixově srovnatelné, pak jsou i jejich prefixy $g(\alpha(x))$ a $g(\alpha(y))$ prefixově srovnatelné. To ale vzhledem k prefixovosti g znamená, že $\alpha(x) = \alpha(y)$. Tedy $\{x, y\} = \{a, b\}$, ale $f(a) = g(c)\texttt{0}$ a $f(b) = g(c)\texttt{1}$ prefixově srovnatelné nejsou. Kód f je tedy prefixový.

Ukažme, že f je optimální. Podle Lemmatu 5.17 existuje pro X a pro výše zvolená a, b optimální a prefixový kód h takový, že $h(a) = u0$ a $h(b) = u1$, $u \in B^+$. Definujme $g' : C \to B^+$ předpisem $g'(c) = u$ a $g'(x) = f'(x)$, $x \neq c$. Platí

$$\begin{aligned}
[\![f]\!]_X &= P_X(a) \cdot |g(c)0| + P_X(b) \cdot |g(c)1| + \sum_{x \in M \setminus \{a,b\}} P_X(x) \cdot |f(x)| \\
&= P_X(a) + P_X(b) + P_{\alpha \circ X}(c) \cdot |g(c)| + \sum_{x \in C \setminus \{c\}} P_{\alpha \cdot X}(x) \cdot |g(x)| \\
&= P(a) + P(b) + [\![g]\!]_{\alpha \circ X}
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
[\![f']\!]_X &= P_X(a) \cdot |u0| + P_X(b) \cdot |u1| + \sum_{x \in M \setminus \{a,b\}} P_X(x) \cdot |h(x)| \\
&= P_X(a) + P_X(b) + P_{\alpha \circ X}(c) \cdot |g'(c)| + \sum_{x \in C \setminus \{c\}} P_{\alpha \cdot X}(x) \cdot \left|g'(x)\right| \\
&= P(a) + P(b) + [\![g']\!]_{\alpha \circ X}.
\end{aligned}$$

Z optimality g plyne $[\![g]\!]_{\alpha \circ X} \leq [\![g']\!]_{\alpha \circ X}$, tedy $[\![f]\!]_X \leq [\![f']\!]_X$. Z Lemmatu 5.18 plyne, že je-li $f' \leq_\ell f$ a f je jednoznačně dekódovatelný, pak $f' \sim_\ell f$, jinak by f' nesplňovalo Kraftovu nerovnost. Kód f je tedy optimální. □

6 Komprese - asymptotické chování

V případě, kdy $M = A^+$, budeme jednotlivá písmena chápat jako náhodný proces ve smyslu Kapitoly 4. V předchozí kapitole jsme zavedli jeden jednoduchý postup, jak na nekonečné množině $M = A^+$ definovat kód, totiž blokovým rozšířením nějakého kódu ma A. V této kapitole prozkoumáme vlastnosti kódování procesů obecněji.

Asymptotickou průměrnou délku kódového slova na jeden vstupní symbol nazveme v případě procesů „kompresní poměr“ a definujeme ho takto:

Definice 6.1. *Pro náhodný proces X s hodnotami v abecedě A a pro kód $f : A^+ \to B^+$ definujeme **dolní** a **horní kompresní poměr** f jako*

$$\underline{[\![f]\!]}_X = \liminf_{n\to\infty} \frac{[\![f]\!]_{X_{[0..n)}}}{n}.$$

$$\overline{[\![f]\!]}_X = \limsup_{n\to\infty} \frac{[\![f]\!]_{X_{[0..n)}}}{n}.$$

***Kompresní poměr** je limita (pokud existuje):*

$$[\![f]\!]_X = \lim_{n\to\infty} \frac{[\![f]\!]_{X_{[0..n)}}}{n}.$$

Nejjednodušším případem je opět i.i.d. proces, kde pro délku obrazu blokového rozšíření platí následující vztah.

Lemma 6.2. *Pro i.i.d. proces X s hodnotami v abecedě A a pro kód $f : A \to B^+$ platí*

$$[\![f^*]\!]_{X_{[0..n)}} = n \cdot [\![f]\!]_{X_0},$$
$$[\![f^*]\!]_X = [\![f]\!]_{X_0}.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že v f^* řetězíme výstupy pro jednotlivá písmenka, platí

$$\left|f^*\left(X_{[0..n)}\right)\right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(X_i\right)\right|.$$

Jelikož jsou X_i a X_0 stejně rozdělené veličiny, jsou stejně rozdělené i veličiny $\left|f(X_i)\right|$ a $\left|f(X_0)\right|$ a mají tudíž stejnou střední hodnotu. Platí tedy $[\![f]\!]_{X_i} = [\![f]\!]_{X_0}$. Z rovnosti jednotlivých středních hodnot a z linearity dostaneme požadovanou rovnost pro střední hodnotu délky blokového kódu:

$$[\![f^*]\!]_{X_{[0..n)}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\left|f\left(X_i\right)\right|\right) = n \cdot \left|f\left(X_0\right)\right| = n[\![f]\!]_{X_0}.$$

Přechod k limitě, tedy důkaz druhé rovnosti z lemmatu, je už triviální. □

Z předchozího lemmatu je vidět, proč blokové rozšíření nemusí být optimální volbou. Pokud totiž na A není možné dosáhnout entropie $\mathcal{H}_D\left(X_0\right)$, bude se nedokonalost kódu f násobit a pro dostatečně dlouhé vektory nebude kódování optimální (bude např. překročena mez pro Shannonovy kódy). Přirozenou myšlenkou, jak konstruovat optimální kódy pro A^+, je zkontruovat pro každý vektor $X_{[0..n)}$ vždy nový kód f_n a tyto parciální kódy sloučit. Problém ovšem je, že výsledný kód nebude prefixový a nemusí být ani prostý. Lze očekávat, že pro různé délky budou volena stejná kódová slova. Pro překonání této obtíže je důležitá následující myšlenka.

Lemma 6.3. *Předpokládejme, že $f_n : A^n \to B^+$, $n \geq 1$ je soubor prefixových kódů, a nechť $\alpha : \mathbb{N}_+ \to B^+$ je prefixový kód. Potom je kód $g : A^+ \to B^+$, definovaný předpisem*

$$g(u) = \alpha\left(|u|\right) f_{|u|}(u),$$

prefixový.

Důkaz. Buďte slova $g(u)$ a $g(v)$ prefixově srovnatelná. Pak i $\alpha(|u|)$ a $\alpha(|v|)$ jsou prefixově srovnatelná, a protože α je prefixový kód, mají u a v stejnou délku, označme ji k. Po zkrácení $g(u)$ a $g(v)$ o společný prefix $\alpha(k)$ vidíme, že i $f_k(u)$ a $f_k(v)$ jsou prefixově srovnatelné. Z toho plyne $u = v$, protože f_k je prefixový. Tedy g je prefixový. □

Eliasovy kódy

Nyní je třeba najít vhodný kód α. Naznačíme zde postup, jak generovat posloupnost kódů jejichž asymptotické vlastnosti se zlepšují. Jedná se o variaci na tzv. Eliasovy γ-kódy. Uveďme nejprve pomocné lemma.

Lemma 6.4. *Předpokládejme, že $f : M \to B^+$ je prostý kód a $\alpha : \mathbb{N}_+ \to B^+$ je prefixový kód. Potom je kód $g : M \to B^+$, definovaný předpisem*

$$g(a) = \alpha\left(|f(a)|\right) f(a),$$

prefixový.

Důkaz. Podobně jako Lemma 6.3. □

Začneme s kódy γ_0 a β. Fixujme dva speciální znaky z abecedy B a označme je pro jednoduchost 0 a 1. Pak prefixový kód $\gamma_0 : \mathbb{N} \to B^+$ je definován předpisem

$$\gamma_0(n) = 1^n 0.$$

Zvolme nějaké uspořádání na množině B. Zobrazení $\beta : \mathbb{N}_+ \to B^+$, definujeme tak, že prvních D kladných přirozených čísel zobrazíme bijektivně na množinu B při zvoleném uspořádání, dalších D^2 čísel se zobrazí na B^2 v lexikografickém uspořádání, a tak dále. Nulu bychom takto přirozeně zobrazili na prázdné slovo, což můžeme vzhledem k tomu, že prázdné slovo jako kódové nepřipouštíme, chápat jako

užitečnou dodatečnou konvenci: slovo s nulovou délkou je prázdné a nula se zobrazuje na prázdné slovo.

Zobrazení β je nyní bijekce mezi $\mathbb{N}$ a B^*. Pokud písmena B identifikujeme s jejich pořadovými čísly, tedy pokud uvažujeme $B = \{1, 2, \ldots, D\}$, dostaneme přirozený, byť málo používaný D-adický numerační systém, u kterého stejně jako u standardního D-árního zápisu platí, že $a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0$ reprezentuje číslo

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i D^i\,,$$

jak lze snadno ověřit indukcí. Všimněme si, že zde používáme jiné označení písmen ciframi, než byla výše uvedená volba 0 a 1. To můžeme chápat jako připomínku rozdílné povahy kódů γ a kódu β.

Posloupnost slov kladné délky k seřazená lexikograficky začíná k jedničkami a končí k ciframi D. Tato slova tedy odpovídají číslům n splňujícím

$$D^{k-1} \le \sum_{i=0}^{k-1} D^i = \sum_{i=1}^{k-1} D^i + 1 \le n \le \sum_{i=1}^{k} D^i < D^{k+1} = D + (D-1)\sum_{i=1}^{k} D^i.$$

D-adický zápis je samozřejmě nejvýše tak dlouhý jako D-ární. Vidíme např., že číslo D^{k+1}, což je v D-árním zápisu první číslo s délkou zápisu $k+2$, má v D-adickém zápisu délku $k+1$, konkrétně k cifer $D-1$, následovaných jedním D (např. $8 = 112$).

Podle výše uvedené řady nerovností tedy pro kladné n platí $k-1 \le \log_D n < k+1$, neboli

$$\log_D n - 1 < |\beta(n)| \le \log_D n + 1,$$

kde druhá nerovnost je neostrá pouze pro $n = 1$.

Lemma 6.5. *Kódy $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{N} \to B^+$, definované předpisem*

$$\gamma_1(n) := \gamma_0(|\beta(n)|)\beta(n), \qquad \gamma_2(n) := \gamma_1(|\beta(n)|)\beta(n),$$

jsou prefixové,

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$$

a pro každé kladné n platí

$$\big|\gamma_1(n)\big| \le 2\log_D n + 3, \qquad \big|\gamma_2(n)\big| \le \log_D n + 2\log_D(\log_D n + 1) + 4.$$

Funkce $|\gamma_1|, |\gamma_2| : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou neklesající.

Důkaz. Jelikož je γ_0 prefixový a β je na $\mathbb{N}_+$ prostý, je dle Lemmatu 6.4 γ_1 prefixový kód na $\mathbb{N}_+$. Stejné argumenty dokazují, že je γ_2 prefixový.

Hodnoty na nule plynou z konvence $\beta(0) = \varepsilon$. Je také vidět, že hodnota v nule neporušuje prefixovost: nula je jediné kódové slovo začínající nulou.

Omezení délek kódů vyplývají z konstrukce a z omezení pro délku kódu β výše. □

Věta 6.6. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A, který má entropií. Nechť $f : A^+ \to B^+$ je prefixový kód (nemusí být blokový). Potom*

$$\mathcal{H}_D(X) \leq \underline{[\![f]\!]}_X .$$

Důkaz. Kód f zúžený na $M = A^n$ je opět prefixový. Z Tvrzení 5.10 plyne, že

$$[\![f]\!]_{X_{[0..n)}} \geq \mathcal{H}_D\left(X_{[0..n)}\right).$$

Vydělením obou stran rovnice číslem n a přechodem k liminf dostáváme tvrzení. □

Věta 6.7. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A, který má entropii. Pak existuje prefixový kód $f : A^+ \to B^+$, takový, že*

$$[\![f]\!]_X = \mathcal{H}_D(X) .$$

Důkaz. Aplikací Tvrzení 5.15 dostáváme, že pro každé n existuje prefixový kód f_n z A^n do B^+ se střední délkou kódu menší než $\mathcal{H}\left(X_{[0..n)}\right) + 1$. Definujme

$$f(u) = \gamma_1(|u|) f_{|u|}(u), \qquad u \in A^+,$$

což je podle Lemmatu 6.3 prefixový kód, pro který platí

$$[\![f]\!]_{X_{[0..n)}} = |\gamma_1(n)| + [\![f_n]\!]_{X_{[0..n)}} \leq 2\log_D n + 4 + \mathcal{H}_D\left(X_{[0..n)}\right).$$

Poděleníím n a přechodem k limsup, dokončíme důkaz.

□

Věta 6.8. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A. Nechť $f : A^+ \to B^+$ je prostý kód (nemusí být blokový). Potom existuje prefixový kód, který má dolní i horní kompresní poměr stejný jako f.*

Speciálně, pokud má f kompresní poměr, existuje prefixový kód se stejným kompresním poměrem jako f.

Důkaz. Definujme $g(u) = \gamma_1(|f(u)|) f(u)$. Dle Lemmatu 6.4 je takový kód prefixový.

Zvolme libovolné $\delta > 0$ a k němu k takové, že $\frac{|\gamma_1(m)|}{m} < \delta$, pro všechna $m \geq k$. Množina všech slov délky nejvýše k nad abecedou B je konečná a kód f je prostý, proto existuje $\ell > 0$ takové, že pro všechna $n \geq \ell$, $f(A^n)$ obsahuje jen slova délky minimálně $k + 1$.

Z toho plyne,

$$|f(u)| \leq |g(u)| = |\gamma_1(|f(u)|)| + |f(u)| \leq \delta|f(u)| + |f(u)|.$$

Neboli

$$[\![f]\!]_{X_{[0..n)}} \leq [\![g]\!]_{X_{[0..n)}} \leq (1+\delta) \cdot [\![f]\!]_{X_{[0..n)}}.$$

Dostáváme, že $\overline{[\![g]\!]}_X$ je mezi $\overline{[\![f]\!]}_X$ a $(1+\delta)\overline{[\![f]\!]}_X$. Stejné nerovnosti platí i pro dolní kompresní poměr. Jelikož bylo $\delta > 0$ libovolné, jsou horní kompresní poměry f a g stejné. Totéž platí pro dolní kompresní poměry, a tedy i pro kompresní poměr, pokud existuje. □

Stejně jako u konečné abecedy tedy požadavek prefixovosti neznamená žádnou nevýhodu oproti požadavku prostoty. Negativně to vyjadřuje následující tvrzení.

Důsledek 6.9. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A, který má entropii. Nechť $f : A^+ \to B^+$ je prostý kód. Potom $\mathcal{H}_D(X) \leq \underline{[\![f]\!]}_X$.*

Důkaz. Přímo z Věty 6.6 a Věty 6.8. □

6.1 Bodový kompresní poměr

V předchozí části jsme zkoumali limitu posloupnosti středních hodnot, tedy jak se limitně chová průměrný poměr délky výstupního slova vůči délce vstupu. V této kapitole zesílíme naši pozornost a budeme se zabývat tím, jak se chová daný poměr bodově.

Kokrétně definujeme bodový dolní a horní kompresní poměr takového kódu pro kód $f : A^+ \to B^+$ a náhodný proces X v bodě $\omega \in \Omega$ předpisem

$$\underline{(\!|f|\!)}_X(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\left|f\left(X_{[0..n)}(\omega)\right)\right|}{n}.$$

$$\overline{(\!|f|\!)}_X(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|f\left(X_{[0..n)}(\omega)\right)\right|}{n}.$$

Bodový kompresní poměr je limita (pokud existuje):

$$(\!|f|\!)_X(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|f\left(X_{[0..n)}(\omega)\right)\right|}{n}.$$

Pokud zkoumáme střední hodnotu bodového kompresního poměru, mohli bychom očekávat, že se rovná kompresnímu poměru definovanému dříve. Tak tomu bohužel vždy není, neboť nelze vždy prohodit pořadí střední hodnoty a limitního přechodu, aniž by to mělo vliv na výslednou hodnotu. Vzhledem k nezápornosti zkoumaných funkcí lze alespoň říci, že střední hodnota dolního bodového poměru je menší než dolní kompresní poměr - jedná se o důsledek Fatouova lemmatu. My zde toto lemma neuvádíme a nebudeme ani nikde dále využívat zmíněnou nerovnost.

Nejprve ukážeme, že bodový dolní kompresní poměr pro prostý kód je skoro všude větší nebo roven informačnímu obsahu a tedy i entropii, pokud existuje. Dolní a horní informační obsah procesu X v bodě $\omega \in \Omega$ definujeme předpisem

$$\underline{\mathfrak{I}}_X(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}(\omega)}{n}.$$

$$\overline{\mathfrak{I}}_X(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}(\omega)}{n}.$$

Informační obsah procesu je limita (pokud existuje):

$$\mathfrak{I}_X(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}(\omega)}{n}.$$

Začneme důležitým lemmatem z teorie pravděpodobnosti.

Lemma 6.10 (Borel-Cantelliho lemma)**.** *Buď V_n, $n \in \mathbb{N}$, posloupnost měřitelných podmnožin Ω takových, že $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(V_n\right) < +\infty$. Pak pro skoro každý bod $\omega \in \Omega$ platí, že náleží jen do konečného počtu těchto množin, t.j.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} V_k\right) = 0.$$

Důkaz. Průnik zmenšujících se sjednocení popisuje právě množinu bodů, které se vyskytují v nekonečně mnoha množinách V_n. Formulace slovní a pomocí formule si tedy odpovídá. Rovnost dokážeme následovně: jelikož je suma pravděpodobností konečná, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ přirozené číslo m takové, že $\sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}\left(V_k\right) < \varepsilon$. Dále platí

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} V_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq m} V_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}\left(V_k\right) < \varepsilon.$$

Ovšem $\varepsilon > 0$ bylo libovolné. □

Tvrzení 6.11. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A a buď $f : A^+ \to B^+$ prostý kód. Potom platí*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left|f\left(X_{[0..n)}\right)\right| - \mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}\right) \geq 0 \text{ s.j.}$$

Mimo jiné,

$$\underline{(\!|f|\!)}_X \geq \underline{\mathfrak{I}}_X, \quad \overline{(\!|f|\!)}_X \geq \overline{\mathfrak{I}}_X, \qquad \text{s.j.}$$

Důkaz. Uvažujme množiny

$$V_n = \left\{\omega \in s\left(X_{[0..n)}\right) \mid \left|f\left(X_{[0..n)}(\omega)\right)\right| < \mathfrak{I}_{X_{[0,n)}}(\omega) - 2\log n\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

tedy množiny, na jejichž obraz kóduje f překvapivě dobře, přičemž za překvapivou odchylku od očekávané hodnoty (informačního obsahu) volíme $2\log n$, z důvodu, který se brzy ukáže. Označme tyto obrazy, tedy příslušné množiny slov z A^n, jako W_n. Z definice informačního obsahu dostáváme, že $u \in W_n$, právě když

$$P_{X_{[0..n)}}(u) < 2^{-|f(u)|-2\log n}.$$

Díky předpokladu, že kód f je prostý, pro něj, a tedy tím spíš i pro jeho zúžení na W_n, platí Kraftova nerovnost. Dostáváme tedy

$$\mathbb{P}\left(V_n\right) = \sum_{u\in W_n} P_{X_{[0..n)}}(u) < \sum_{u\in W_n} 2^{-|f(u)|-2\log n} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{u\in W_n} 2^{-|f(u)|} \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konečná, což vyplývá z integrálního kritéria, případně ze srovnání s teleskopickou řadou $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$. Z Borelova-Cantelliho lemmatu nyní plyne, že množina

$$V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} V_k$$

nekonečných slov, na kterých bude nekonečně často docházet k překvapivě krátkému kódování, má nulovou pravděpodobnost. Skoro pro všechna slova se tedy kódování dříve či později začne chovat „normálně“. Neboli, pro $\omega \in \Omega \setminus V$ platí, že patří jen do konečně mnoha množin V_n, a proto

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\left| f(X_{[0..n)}) \right| - \mathfrak{F}_{X_{[0,n)}}(\omega) \right) \geq \liminf_{n \to \infty} \frac{2 \log n}{n} = 0.$$

Druhá část tvrzení plyne z první skrze jednoduché pozorování, že rozdíl dvou dolních limit (taktéž horních limit a limit) je větší nebo roven dolní limitě rozdílu. □

Pokud informační obsah konverguje skoro jistě k entropii, neboli pokud má proces sAEP, dostáváme okamžitě následující důležitý fakt.

Věta 6.12. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A a entropií, který má silně asymptoticky rovnoměrné rozložení (např. i.i.d. proces). Nechť $f : A^+ \to B^+$ je prostý kód. Potom*

$$\underline{(\!|f|\!)}_X \geq \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j. .}$$

Kapitolu zakončíme pozitivním tvrzením, že pro rozumně se chovající procesy komprimují kódy zkonstruované v úvodu optimálně skoro všude i bodově.

Tvrzení 6.13. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A. Potom existuje prefixový kód $f : A^+ \to B^+$ takový, že*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\left| f\left(X_{[0..n)}\right) \right| - \mathfrak{F}_{X_{[0..n)}} \right) = 0 \text{ s.j.}$$

Mimo jiné,

$$\underline{(\!|f|\!)}_X \leq \underline{\mathfrak{F}}_X, \quad \overline{(\!|f|\!)}_X \leq \overline{\mathfrak{F}}_X, \qquad \text{s.j.}$$

Důkaz. Pro každé $n \geq 1$ buď f_n Shannonův kód pro $X_{[0..n)}$. Definujme

$$f(u) = \gamma_1(|u|) f_{|u|}(u), \qquad u \in A^+,$$

což je podle Lemmatu 6.3 prefixový kód. Pro $\omega \in s\left(X_{[0..n)}\right)$ platí

$$\frac{\left| f\left(X_{[0..n)}(\omega)\right) \right|}{n} \leq \frac{2 \log_D n + 4 + \mathfrak{F}_{X_{[0..n)}}(\omega) + 1}{n}.$$

Rozdíl stran nerovnosti je tedy shora omezen výrazem $(2 \log_D n + 5)/n$, který konverguje k nule. Tedy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\left| (f(X_{[0..n)}) \right| - \mathfrak{I}_{X_{[0..n)}} \right) \leq 0 \text{ s.j.}$$

Z Tvrzení 6.11 máme opačný omezení pro dolní limitu, a proto existuje limita a je rovna nule. Tím je dokázána první část tvrzení. Druhá část je okamžitým důsledkem. □

Opět můžeme formulovat silnější verzi v případě silně asymptoticky rovnoměrného rozdělení. Důkaz je přímým důsledkem výše uvedeného tvrzení a samotné definice sAEP.

Věta 6.14. *Buď X náhodný proces s výstupní abecedou A a entropií, který má silně asymptoticky rovnoměrné rozložení (např. i.i.d. proces). Potom existuje prefixový kód $f : A^+ \to B^+$ takový, že*

$$(\!|f|\!)_X = \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j.}$$

7 Komprese - Univerzální kódy

V minulé části jsme ukázali, že prosté kódy nejsou schopny komprimovat v rychlejším poměru, než je entropie procesu, a zároveň jsme zkonstruovali prefixové kódy, které optimální kompresní poměr dosahovaly. Naše výsledky (týkající se průměrné délky kódu) platily pro všechny procesy s entropií. Na druhou stranu, optimální kód byl vždy zkonstruován pro jeden náhodný proces a pro jiné procesy optimální nebyl. V této kapitole ukážeme, že lze zkonstruovat kód, či kódy, který bude mít kompresní poměr roven entropii zároveň pro všechny i.i.d. procesy. Poznamenejme bez precizní formulace a důkazu, že takový kód bude optimální asymptoticky, ale pro omezenou délku zpráv a konkrétní proces optimální nebude. Důvodem je zvyšující se divergence mezi jednotlivými procesy.

7.1 Frekvenční kód

Nejjednodušší kód, který je asymptoticky optimální pro všechny i.i.d. procesy s hodnotami v abecedě B velikosti D, je frekvenční kód, který popisuje dané slovo tak, že udá počty výskytů jednotlivých písmen, spolu s pořadím daného slova v množině všech slov se stejnými počty výskytů.

Předpokládejme, že se kódující i dekódující strana shodne na konkrétním uspořádání všech slov nad abecedou A. Můžeme například zvolit uspořádání na A a lexikograficky ho rozšířit na A^+. Pokud potom pošleme informaci o počtu výskytů písmen v dané zprávě a relativní pořadí této zprávy mezi slovy se stejným počtem výskytů, není problém pro dekódujícího dohledat si v seznamu těchto slov danou zprávu.

Nechť tedy $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ posloupnost je posloupnost písmen z A ve zvoleném uspořádání. Pro slovo $u \in A^+$ a $a \in A$, značí $|u|_a$ počet výskytů písmene a ve slově u. Zobrazení $\boldsymbol{p} : A^+ \to \mathbb{N}^m$,

$$\boldsymbol{p} : u \mapsto \left(|u|_{a_1}, |u|_{a_1}, \dots, |u|_{a_m}\right),$$

přiřazuje každému slovu jeho **Parikhův vektor**. Označme

$$T(\boldsymbol{v}) = \{u \in A^+ \mid \boldsymbol{p}(u) = \boldsymbol{v}\},$$

množinu slov, s daným Parikhovým vektorem $\boldsymbol{v}$. Tato slova jsou tedy permutací jedno druhého. Prvky v $T(\boldsymbol{v})$ seřadíme v danému uspořádání na A^+ a zápisem $T(\boldsymbol{v})_i$, $0 \leq i < |T(\boldsymbol{v})|$, budeme značit i-tý prvek množiny $T(\boldsymbol{v})$ v daném uspořádání. Symbolem $\ell(u)$ budeme značit pořadové číslo slova u mezi slovy se stejným Parikhovým vektorem, tedy

$$T(\boldsymbol{p}(u))_{\ell(u)} = u.$$

Zároveň označme jako $\mathcal{P}_u$ empirické pravděpodobností rozdělení na A dané zprávou u, konkrétně $\mathcal{P}_u(a) = \frac{|u|_a}{|u|}$, $a \in A$.

Frekvenční kód $\mathfrak{f} : A^+ \to B^+$ je nyní definován předpisem

$$\mathfrak{f}(u) = \gamma_1(|u|_1)\gamma_1(|u|_2)\dots\gamma_1(|u|_m)\gamma_2(\ell(u)),$$

kde pro jednoduchost zápisu předpokládáme, že $A = \{1, 2, \dots m\}$.

Lemma 7.1. *Frekvenční kód* $\mathfrak{f} : A^+ \to B^+$ *je prefixový.*

Důkaz. Nechť jsou $\mathfrak{f}(u)$ a $\mathfrak{f}(v)$ prefixově srovnatelné. Pak jsou i $\gamma_1(|u|_1)$ a $\gamma_1(|v|_1)$ prefixově srovnatelné a z prefixovosti γ_1 plyne $|u|_1 = |v|_1$. Tento společný prefix odstraníme a opakováním téhož postupu dostaneme, že slova u a v mají stejný Parikhův vektor a že $\ell(u) = \ell(v)$. Tedy $u = v$, což jsme chtěli ukázat. □

Lemma 7.2. *Pro* $u \in A^+$ *platí*

$$|T(\boldsymbol{p}(u))| \leq D^{|u|\cdot\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_u)}.$$

Důkaz. Na $A^{|u|}$ uvažujme pravděpodobnostní rozdělení Q, které je definováno takto:

$$Q(v) = \prod_{i=0}^{|u|-1} \mathcal{P}_u(v_i).$$

(Rozdělení Q je rozdělením náhodné veličiny $Y_{[0..n)}$ pro i.i.d. proces Y s jednorozměrným rozdělením $P_{Y_0} := \mathcal{P}_u$.) Z definice je patrné, že $Q(v) > 0$ pro všechna $v \in T(\boldsymbol{p}(u))$. Pro takové v navíc platí, $v_i \in s(\mathcal{P}_u)$ pro všechna $i < |u|$ a

$$\begin{aligned}\log_D Q(v) &= \sum_{i=0}^{|u|-1} \log_D \mathcal{P}_u(v_i) = \sum_{a\in s(\mathcal{P}_u)} |v|_a \log_D((\mathcal{P}_u(a))) \\ &= |u| \sum_{a\in s(\mathcal{P}_u)} \frac{|u|_a}{|u|} \log_D((\mathcal{P}_u(a))) = -|u|\cdot\mathcal{H}_D\left(\mathcal{P}_u\right),\end{aligned}$$

kde druhá rovnost vznikla seskupením stejných sčítanců. Všechna slova z $T(\boldsymbol{p}(u))$ tedy mají stejnou pravděpodobnost $D^{-|u|\cdot\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_u)}$, a proto jich nemůže být víc než tvrdí lemma. □

Lemma 7.3. *Pro* $x \in A^{\mathbb{N}}$ *platí*

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left|\mathfrak{f}\left(x_{[0..n)}\right)\right|}{n} \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_D\left(\mathcal{P}_{x_{[0..n)}}\right).$$

Důkaz. Označme $u = x_{[0..n)}$. Platí

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{f}\left(x_{[0..n)}\right)\right| &= |\gamma_2(\ell(u))| + \sum_{a\in A} |\gamma_1(|u|_a)| \leq |\gamma_2(|T(u)|)| + \sum_{a\in A} |\gamma_1(n)| \\ &\leq |A|(2\log_D n + 3) + \log_D\left(D^{n\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_u)}\right) + 2\log_D\left(\log_D D^{n\mathcal{H}_D(\mathcal{P}_u)} + 1\right) + 4. \\ &\leq |A|(2\log_D n + 3) + n\mathcal{H}_D\left(\mathcal{P}_{x_{[0..n)}}\right) + 2\log_D\left(n\log_D(|A|) + 1\right) + 4.\end{aligned}$$

Podělením číslem n a přechodem k limsup dostáváme tvrzení. □

Nyní můžeme ukázat, že frekvenční kód je (dokonce bodově) optimální pro všechny procesy, u kterých empirická frekvence odpovídá entropii.

Věta 7.4. *Nechť proces X s hodnotami v abecedě A splňuje*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_D\left(\mathcal{P}_{X_{[0..n)}(\omega)}\right) = \mathcal{H}_D(X) \qquad \text{s.j.}\,.$$

Pak

$$\langle\!|\mathfrak{f}|\!\rangle_X = \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j.} \quad a \quad [\![\mathfrak{f}]\!]_X = \mathcal{H}_D(X)\,.$$

Důkaz. Z předchozího lemmatu díky předpokladu dostáváme

$$\underline{\langle\!|\mathfrak{f}|\!\rangle}_X \leq \overline{\langle\!|\mathfrak{f}|\!\rangle}_X \leq \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j.}$$

Z Věty 6.12 naopak plyne, že $\underline{\langle\!|\mathfrak{f}|\!\rangle}_X \geq \mathcal{H}_D(X)$ skoro jistě. Tedy i $\langle\!|\mathfrak{f}|\!\rangle_X = \mathcal{H}_D(X)$ skoro jistě. □

Které procesy jsou v tomto smyslu rozumné, zde nebudeme podrobněji zkoumat. Nebudeme ani zkoumat, zda je frekvenční kód optimální i za nějaké slabší podmínky (např. sAEP). Omezíme se na nejjednodušší případ i.i.d.

Lemma 7.5. *Pro i.i.d. proces X platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_D\left(\mathcal{P}_{X_{[0..n)}}\right) = \mathcal{H}_D(X) \qquad \text{s.j.}\,.$$

Důkaz. Podle zákona velkých čísel platí pro každé $a \in s\left(P_{X_0}\right)$, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_{X_{[0..n)}} = P_{X_0} \text{ s.j.}$$

Ze spojitosti součtu a součinu a spojitosti logaritmu pro kladné hodnoty tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{a\in s\left(\mathcal{P}_{X_{[0..n)}}\right)} \mathcal{P}_{X_{[0..n)}}(a)\left(-\log_D \mathcal{P}_{X_{[0..n)}}(a)\right) \\
&= \sum_{a\in s\left(P_{X_0}\right)} P_{X_0}(a)\left(-\log_D P_{X_0}(a)\right) = \mathcal{H}_D\left(P_{X_0}\right) = \mathcal{H}_D(X)\,.
\end{aligned}$$

□

Frekvenční kód je univerzální v tom smyslu, že dosahuje optimální kompresi dat pro i.i.d. proces. Na rozdíl od blokových kódů má však jednu velkou nevýhodu. Kódovací i dekódovací algoritmus má exponenciální výpočtovou složitost.

Navíc má velké dekódovací zpoždění: nemůžeme dekódovat postupně, zprávu můžeme začít dekódovat až poté, co je celá přenesena.

Zároveň tento algoritmus, tak jak jsme ho zde představili, nefunguje obecně pro stacionární procesy, či souvislé Markovské procesy. Dal by se rozšířit tím, že bychom zvažovali frekvence výstupu slov, nikoliv jen písmen, ale toto rozšíření by vyžadovalo jemnou práci s mnoha parametry. Raději představíme jiný typ kódu.

7.2 Lempelův-Zivův rekurenční kód

Další typ kódů je založen na rekurenci. Podslovo kódovaného textu je určeno adresou svého předcházejícího výskytu. Tyto kódy jsou stejně jako frekvenční kód univerzální: dosahují optimální kompresi dat pro každý i.i.d. proces.

Časová složitost kódovacího algoritmu je $\mathcal{O}(n \log n)$, kde n je délka komprimovaného slova. Časová složitost dekódovacího algoritmu je dokonce lineární.

Rekurenční kódy lze konstruovat pro libovolnou abecedu. Dané slovo $u \in B^*$ rozložíme na bloky proměnné délky tak, že začneme prázdným slovem a pokračujeme vždy nejkratším úsekem, který se mezi předcházejícími bloky nevyskytuje. Pokud po ukončení takového algoritmu zbude neprázdný koncový blok z u přidáme ho do souboru bloků, viz pseudokód níže.

Výslednému posloupnosti $\{y_0, y_1, \ldots, y_C\}$, kde C závisí na u, říkáme **rozbor**. Platí $y = y_1 y_2 \cdots y_C$ a pro $1 \leq i \leq C$ je y_i tvaru $y_{a_i} c_i$, kde $c_i \in A$. Zvolme pevně prefixový kód $f : A \to B^+$. **Lempelův-Zivův kód** slova u pak definujeme jako:

$$\mathfrak{r}(u) = \gamma_2(a_1) f(c_1) \gamma_2(a_2) f(c_2) \ldots \gamma_2(a_C) f(c_C).$$

Příklad 7.6. Zakódujme slovo

$$u = 000011001110011001101110 0$$

nad binární abecedou $A = \{0, 1\}$ opět do binární abecedy $B = \{0, 1\}$, kde za f volíme identitu. Výstup algoritmu `LZ-Rozbor` je shrnut v následující tabulce:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y^{(i)}$	ε	0	00	01	1	001	11	0011	00110	111	00
a_i		0	1	1	0	2	4	5	7	6	1
c_i		0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
k_i	0	1	3	5	6	9	11	15	20	23	25

Připomeňme, že naše kódování γ_2 používá pro kódování čísel nejprve unární zápis čísla zakončený oddělovacím symbolem (to odpovídá γ_0) a poté dyadický zápis čísel pomocí β. Symboly abecedy B tedy plní tři různé role. Pro γ_0 (tam jsme se rozhodli je značit 1 a 0), poté pro β (kde jsme používali jména 1 a 2) a konečně slouží pro zakódování abecedy A. Pro větší přehlednost zachováváme různá značení pro prvky B i v následujícím zápisu.

$$(y)_{i=0}^{10} = (\varepsilon, 0, 00, 01, 1, 001, 11, 0011, 00110, 111, 00)$$
$$(a_i, c_i)_{i=1}^{10} = ((0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (2,1), (4,1), (5,1), (7,0), (6,1), (1,0))$$
$$\mathfrak{r}(u) = \overbrace{0}^{0}\ \overbrace{\mathbf{0}10110}^{1}\ \overbrace{\mathbf{0}1011}^{1}\ \overbrace{\mathbf{1}}^{0}\ \overbrace{0}^{2}\ \overbrace{\mathbf{1}1012}^{4}\ \overbrace{\mathbf{1}10212}^{5}\ \mathbf{1}10221\mathbf{1}$$
$$\overbrace{110111110}^{7}\ \overbrace{\mathbf{0}10222}^{6}\ \overbrace{\mathbf{1}1011}^{1}\mathbf{0}$$

Algorithm 2: `LZ Rozbor`

Data: $u \in A^+$
Result: $(y_0, y_1, \dots, y_C); (k_0, k_1, \dots, k_C); (a_1, \dots, a_C); (c_1, \dots, c_C)$
$y_0 \leftarrow \varepsilon$;
$z \leftarrow u$;
$j \leftarrow 1$;
$k_0 \leftarrow 0$;
while $z \neq \varepsilon$ **do**
  $y_j \leftarrow \begin{cases} \text{nejkratší prefix } z \text{ neležící v } \{y_0, \dots, y_{j-1}\}, \text{ pokud existuje,} \\ z \text{ jinak} \end{cases}$;
  $(a_j, c_j) \leftarrow\ c_j \in A,\ a_j < j$ takové, že $y_j = y_{a_j} c_j$;
  $k_j \leftarrow \left| y_1 \cdots y_j \right|$;
  $z \leftarrow y_C^{-1} z$;
  $C \leftarrow C + 1$;
end

Pokud tedy $B = \{0, 1\}$, pro symbol 2 dyadického zápisu použijeme 0 a pro **0**, **1** postupně 0, 1, bude u ve výsledku zakódováno jako

$$\mathfrak{r}(u) = 00101101011101101011001011000111101111101000011011 0\,.$$

Lemma 7.7. *Lempelův-Zivův kód je prostý.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{r}(u) = \mathfrak{r}(v)$. Protože jsou obě slova zřetězením posloupností kódových slov prefixových kódů, jsou tyto posloupnosti pro obě slova stejné. Posloupnost slov definujících Lempel-Zivův kód jednoznačně definuje rozbor slov u a v. Rozbory obou slov se tedy rovnají, a proto i $u = v$. □

7.2.1 Optimalita Lempel-Zivova kódu (nepovinné)

Lemma 7.8. *Délka Lempelova-Zivova kódu splňuje omezení*

$$|\mathfrak{r}(u)| \leq C(u) \left(\log_D C(u) + 2 \log_D(\log_D C(u) + 1) + 4 + K \right),$$

kde K je konstanta, která dominuje délky kódových slov kódu $|f|$.

Důkaz. Z konstrukce kódu vyplývá, že

$$|\mathfrak{r}(u)| = \sum_{i=1}^{C(u)} \left(|\gamma_2(a_i)| + |f(c_i)| \right),$$

pro čísla $C(u)$, a_i a c_i odvozené z rozkladu slova u. Z definice plyne, že $a_i < C(u)$. Z monotónnosti logaritmu a z odhadu pro γ_2 z lematu 6.5 pak získáváme pro kladná a_i:

$$|\gamma_2(a_i)| \leq \log_D C(u) + 2 \log_D(\log_D C(u) + 1) + 4.$$

Ovšem platnost stejného odhadu pro případ $a_i = 0$ lze ověřit pouhým dosazením.

Máme tedy uniformní odhad, který již zaručuje platnost tvrzení. □

Další lemma říká, že $C(u)$ roste spolu s délkou u do nekonečna.

Lemma 7.9. *Pro $u \in A^+$ platí $C(u) \geq \sqrt{|u|}$.*

Důkaz. Buď $\left(y^{(i)}\right)_{0 \leq i \leq C(u)}$ rozbor slova u. Z konstrukce rozboru plyne, že $\left|y^{(i)}\right| \leq i$, pro všechna $i \leq C(u)$. Tedy

$$|u| = \sum_{i=1}^{C(u)} \left|y^{(i)}\right| \leq \sum_{i=1}^{C(u)} i = \frac{C(u)(C(u)+1)}{2} \leq C^2(u).$$

Z toho již dokazované tvrzení plyne. □

Lemma 7.10. *Buď P pravděpodobnost na A, $q = \max_{a \in A} P(a)$, $u \in A^+$. Potom*

$$C(u)\left(\log_D C(u) - \log_D\left(\log_D^2 C(u) + C(u) q^{\log_D^2 C(u)} + 1\right)\right) \leq -\log_D P^{|u|}(u).$$

Důkaz. Vzhledem k vlastnostem rozboru, platí

$$P^{|u|}(u) = \prod_{i=1}^{C(u)} P^{|y^{(i)}|}(y^{(i)}).$$

Označme $m = C(u)$, $n = |u|$. Z konkávnosti logaritmu dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\log_D P^{|u|}(u) &= \frac{1}{m}\log_D \prod_{i=1}^{m} P^{|y^{(i)}|}(y^{(i)}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log_D P^{|y^{(i)}|}(y^{(i)}) \\ &\leq \log_D \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P^{|y^{(i)}|}(y^{(i)}) = -\log_D m + \log_D \sum_{i=1}^{m} P^{|y^{(i)}|}(y^{(i)}).\end{aligned}$$

Z toho plyne,

$$m\left(\log_D m - \log_D \sum_{i=1}^{m} P^{|y^{(i)}|}(y^{(i)})\right) \leq -\log_D P^{|u|}(u).$$

Pro odhad sumy v předchozím výrazu je důležité, že jsou slova z rozboru různá, až na to poslední. V následujícím odhadu jsou slova seskupena dle délky a společná pravděpodobnost slov stejné délky je odhadnuta shora pravděpodobností 1. Označme $R'(u) = \{y^{(i)}, 1 \leq i \leq m-1\}$. Pak platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} P^{|y^{(i)}|}\left(y^{(i)}\right) &= P^{|y^{(m)}|}\left(y^{(m)}\right) + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{y \in R'(u), |y|=k} P^k(y) + \sum_{y \in R'(u), |y|>\ell} P^{|y|}(y) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\ell} 1 + m q^{\ell+1} \leq 1 + \ell + m q^{\ell+1}.\end{aligned}$$

V aplikacích lemmatu budeme potřebovat, že logaritmus pravé strany bude zanedbatelný vzhledem k logaritmu m. Vhodnou volbou je zde $\ell = \left\lfloor \log_D^2 m \right\rfloor$. Při této volbě vychází z předchozích nerovností požadovaný odhad. □

Předchozí dvě lemmata by se dala, při zanedbání některých členů, číst jako nerovnosti $|\mathfrak{r}(u)| \leq C(u) \log_D C(u) \leq -\log_D P^{|u|}(u)$. V dalším lemmatech ukážeme, že asymptoticky je toto zanedbání členů v pořádku.

Lemma 7.11. *Platí*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m\left(\log_D m + 2\log_D\left(\log_D m + 1\right) + 4 + K\right)}{m \log_D m} = 1.$$

Pokud $0 < q < 1$*, pak*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m\left(\log_D m - \log_D\left(\log_D^2 m + mq^{\log_D^2 m} + 1\right)\right)}{m \log_D m} = 1.$$

Důkaz. První limita je důsledkem faktu, že $\log_D(\log_D m)$ roste pomaleji než $\log_D m$ a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2\log_D\left(\log_D m + 1\right) + 4 + K}{\log_D m} = 0.$$

U druhé limity, nejprve analyzujme chování posloupnosti $\left(mq^{\log_D^2 m}\right)_{m=1}^{\infty}$,

$$mq^{\log_D^2 m} = D^{\log_D\left(mq^{\log_D^2 m}\right)} = D^{\log_D m + \log_D^2 m \log_D q}.$$

Jelikož jde $\log_D m$ k nekonečnu a $\log_D(q) < 0$, jde exponent u výrazu vpravo k $-\infty$. Proto jde celý výraz k nule. Vyšetřovaná posloupnost je tedy omezená pomocí konstanty, která závisí jen na q. Označme tuto konstantu K'. Dostáváme,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log_D\left(\log_D^2 m + mq^{\log_D^2 m} + 1\right)}{\log_D m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\log_D\left(\log_D^2 m + K' + 1\right)}{\log_D m} = 0.$$

Z toho již plyne platnost hodnoty druhé limity z lemmatu. □

Uvědomme si, že v první limitě je v čitateli horní odhad pro délku kódu. V druhé limitě v čitateli zase vystupuje dolní odhad pro $-\log_D P^{|u|}(u)$, kde P je vlastně libovolná. Pokud přidáme fakt, že počet slov v rozboru jde do nekonečna, pokud do nekonečna jde délka slova, které kódujeme, dostaneme následující důsledek.

Důsledek 7.12. *Pro libovolnou netriviální pravděpodobnost P na abecedě A a pro libovolnou posloupnost $x \in A^{\mathbb{N}}$ platí:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\mathfrak{r}\left(x_{[0..n)}\right)\right|}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log_D P^n\left(x_{[0..n)}\right)}{n}.$$

Důkaz. Buď $q = \max_{a \in A} P(a) < 1$, $c_n = C(x_{[0..n)})$. Použijeme-li odhady

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{|\mathfrak{r}(x_{[0..n)})|}{n} &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_n \left(\log_D c_n + 2\log_D(\log_D c_n + 1) + 4 + K\right)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{c_n \left(\log_D c_n + 2\log_D(\log_D c_n + 1) + 4 + K\right)}{c_n \log_D c_n} \\
&\quad \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{c_n \log_D c_n}{c_n \left(\log_D c_n - \log_D \left(\log_D^2 c_n + c_n q^{\log_D^2 c_n} + 1\right)\right)} \\
&\quad \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{c_n \left(\log_D c_n - \log_D \left(\log_D^2 c_n + c_n q^{\log_D^2 c_n} + 1\right)\right)}{n} \\
&\leq 1 \cdot 1 \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log_D P^n(x_{[0..n)})}{n}.
\end{aligned}$$

□

Věta 7.13. *Pro každý i.i.d. proces X s hodnotami v abecedě A platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\mathfrak{r}\left(X_{[0..n)}\right)\right|}{n} = \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j.}$$

Tedy

$$L(X, \mathfrak{r}) = \mathcal{H}_D(X).$$

Důkaz. Z Tvrzení 4.10 dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_D P^n\left(X_{[0..n)}\right)}{n} = \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j. .}$$

Aplikací předchozího lemmatu dostáváme, že

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\mathfrak{r}(X_{[0..n)})|}{n} \leq \mathcal{H}_D(X) \text{ s.j. .}$$

Označme $g(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|\mathfrak{r}(X_{[0..n)}(\omega))|}{n}$, podobně $g'(\omega)$ označuje limsup. Z předchozích lemmat dostáváme, že $g \leq g' \leq \mathcal{H}_D(X)$ skoro jistě. Z Věty 6.12 naopak plyne, že $g(\omega) \geq \mathcal{H}_D(X)$ skoro jistě. Tedy $g = g' = \mathcal{H}_D(X)$ skoro jistě. □

Podařilo se nám tedy dokázat, že podobně, jako v případě frekvenční kódu, je i Lempelův-Zivův kód univerzální v tom smyslu, že dosahuje optimální kompresi dat pro i.i.d. proces.

Univerzalita tohoto kódu jde ale mnohem dále. Tento kód dosahuje, v průměru i bodově, optimálního kompresního poměru také pro všechny stacionární procesy a pro všechny, i nestacionární, Markovské procesy. A ani to není definitivní omezení.

I to je důvod pro jeho reálné využití v kompresním formátu gzip, ale také v algoritmech použitých při ukládání souborů TIFF a PDF (zde je na uživateli, zda kompresi chce využít).

Uveďme tato fakta přesněji, v podobě následujícího tvrzení a věty. Důkaz tvrzení spadá do teorie markovských procesů, důkaz Věty pak do ergodické teorie. Oboje vybočuje z rámce našeho předmětu, proto důkazy neuvádíme. Nejprve tvrzení, které říká, že i nestacionární markovské procesy mají dobře definovanou entropii.

Tvrzení 7.14. *Každý homogenní markovský proces X má entropii.*

Věta 7.15. *Pro každý proces X s hodnotami v abecedě A, který je stacionární nebo homogenní markovský, je bodový kompresní poměr roven skoro jistě bodovému informačnímu obsahu na symbol, i.e.*

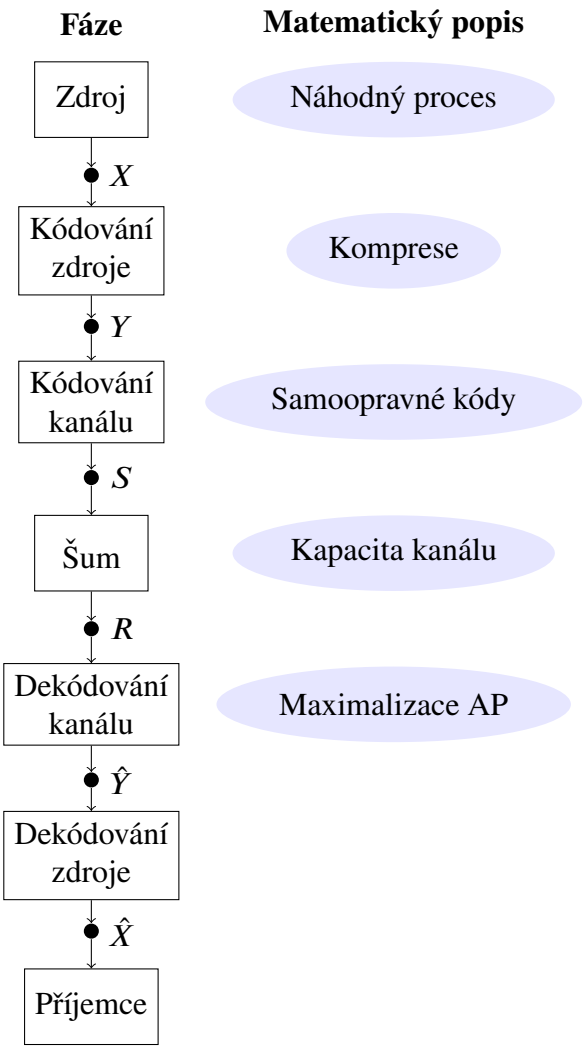
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\mathfrak{r}\left(X_{[0..n)}\right)\right|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{I}_{X_{[0..n)}}}{n} \text{ s.j.}$$

(obě limity skoro jistě existují a jsou si rovny). Z toho plyne, že

$$L(X,\mathfrak{r}) = \mathcal{H}_D(X)\,.$$

8 Komunikační kanál

Základní aplikací teorie informace je komunikace, která přitom obsahuje několik fází, ke kterým se vážou různé požadavky a s tím související různé matematické otázky.



- Za zdroj informace v naší přednášce považujeme diskrétní náhodný proces $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. To je významné zjednodušení. Mnohé informační zdroje (např. hudební produkce) jsou spojité. U spojitých procesů je jejich převod do diskrétní podoby již součástí kódování zdroje pro přenos.
- V případě diskrétního procesu už by žádné kódování zdroje být nemuselo. Důvodem pro něj může být prostá změna abecedy (např. převod písmen anglické abecedy do binárních symbolů ASCII). Součástí a hlavním smyslem kódování zdroje je ovšem obvykle komprese, tedy optimalizace využití kanálu.

- Pokud máme na mysli kanál bez šumu, je kompresí „přenos“ informace dokončen. Uvozovky naznačují, že v takovém případě často ani o přenosu nemluvíme. Je ovšem přirozené např. digitální medium, na které zprávu zapisujeme (a předáváme příjemci), za kanál považovat. Komprese je pak snahou kapacitu takového kanálu/media plně využít.

- Výsledkem kódování zdroje je náhodný proces $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Komprese vede k procesu (co nejbližšímu) uniformně rozložených nezávislých veličin. Takový proces má totiž maximální entropii.

- Pokud uvažujeme kanál se šumem (např. i pokud bereme v úvahu možnou chybovost digitálního média), musíme naopak přidat „kontrolní bity“, neboli zprávu prodloužit tak, aby bylo možné chyby opravit. To je téma samoopravných kódů.

- Cílem kódování kanálu je opět maximálně využít možnosti kanálu. Je klíčovým příspěvkem Shannonova článku z roku 1948, že definoval kapacitu kanálu a ukázal, že je možné se jí kódováním libovolně přiblížit.

- Dekódování poškozené zprávy je často popisováno jako hledání nejbližšího kódového slova. Obecněji ovšem platí, že dekódování je hledáním odeslané zprávy, která je při znalosti zprávy přijaté nejpravděpodobnější (tzv. maximalizace aposteriorní pravděpodobnosti).

- Dekomprese a případný převod do formátu zdroje už je typicky matematicky přímočará.

8.1 Kanál a jeho kapacita

Diskrétní komunikační kanál má reprezentovat situaci, kdy zpráva v podobě konečné posloupnosti znaků ze vstupní abecedy A je převedena do výstupní abecedy B s tím, že může být poškozena šumem. Do deterministického procesu předání informace tak vstupuje šum v podobě jisté míry náhody a nejistoty na výstupu. Namísto deterministické funkce z A^+ do B^+ tak máme kanál charakterizovaný čísly $\left(\Gamma_{u,v}\right)_{u\in A^+, v\in B^+}$, kde $\Gamma_{u,v}$ vyjadřuje pravděpodobnost, že na výstupu uvidíme zprávu v za podmínky, že byla vyslána zpráva u. Na soubor těchto čísel pak klademe přirozené podmínky, že jsou nezáporná a pro každé $u \in A^+$ je $\sum_{v\in B^+} \Gamma_{u,v} = 1$.

Takto obecně definovaný pojem je ovšem těžké zkoumat, a proto se opět omezíme na opakování na konkrétním časovém okamžiku nezávislých událostí a definujeme **diskrétní komunikační kanál bez paměti**. Ten kóduje postupně písmeno z abecedy A na písmeno abecedy B a opět se zde vyskytuje šum. Proto je takový kanál charakterizovaný podmíněnými pravděpodobnostmi $\left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A, b\in B}$, které jsou jakýmsi „pravděpodobnostním zobrazením“ z A do B. Tento soubor čísel tvoří stochastickou matici, tedy hodnoty jsou nezáporné a pro každé $a \in A$, $\sum_{b\in B} \Gamma_{a,b} = 1$.

Při posílání zprávy $u \in A^n$ se postupně posílají jednotlivá písmena zprávy, která podléhají stále stejnému šumu vyjádřenému maticí $\left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A, b\in B}$. Bezpaměťovost pak znamená, že výstupem bude zpráva stejné délky a každá taková zpráva $v \in B^n$ bude mít podmíněnou pravděpodobnost danou předpisem

$$\Gamma^n_{u,v} = \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma_{u_i,v_i}.$$

Diskrétní komunikační kanál bez paměti budeme značit symbolem Γ a budeme ho ztotožňovat se stochastickou maticí $\left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A, b\in B}$, která ho charakterizuje. Jeho rozšíření na zprávy délky n, popsané výše, budeme označovat jako ***n*-tou mocninu kanálu** a budeme ji zapisovat jako Γ^n. Mocninu Γ^n pak opět považujeme za kanál, jehož vstupními symboly jsou zprávy délky n nad abecedou A a výstupní abecedou zprávy délky n nad abecedou B.

Poznamenejme, že kanál, který jsme definovali, je navíc **časově invariantní**, tedy šum nezávisí na čase. Obecně bychom v definici výše mohli psát $(\Gamma_i)_{u_i,v_i}$ a pak by časová invariance znamenala, že $\Gamma_i = \Gamma_j$, pro všechna i, j. Působení by pak bylo stále bezpaměťové, ale nikoli časově invariantní. Řada tvrzení i důkazů níže platí bez dalšího analogicky i pro takové zobecnění, ale pro jednoduchost budeme uvažovat pouze časově invariantní případ.

Jak už jsme řekli, kanál přijímá na vstupu zprávu a transformuje ji na zprávu na výstupu. My budeme uvažovat vstupní zprávu jako hodnotu náhodné veličiny, a kanál budeme vnímat jako zařízení, které transformuje jednu náhodnou veličinu na druhou. Vstupní veličina bude S (sent) a výstupní R (received). Řekneme, že kanál Γ **transformuje** S na R pokud platí

$$\mathbb{P}\left(R = b \mid S = a\right) = \Gamma_{a,b}, \quad \text{pro všechna } a \in A, b \in B \text{ taková, že } \mathbb{P}\left(S = a\right) > 0.$$

Tento fakt budeme zapisovat $R = \Gamma(S)$, nebo také $(R, S) \sim \Gamma$. Ekvivalentní podmínka, která nemusí testovat nenulovost $\mathbb{P}\left(S = a\right)$, je

$$\mathbb{P}\left(R = b, S = a\right) = \Gamma_{a,b} \cdot \mathbb{P}\left(S = a\right), \qquad a \in A, b \in B.$$

Přesněji řečeno, kanál transformuje jedno pravděpodobnostní rozložení na jiné a zároveň korektně specifikuje sdružené rozložení vstupu a výstupu. Konkrétně, pokud je vstupní rozložení $P_S = (P_S(a))_{a\in A}$, jsou výstupní rozdělení $(P_R(b))_{b\in B}$ a sdružené rozdělení

$$(P_{S,R}(a, b))_{a\in A, b\in B}$$

definována předpisem

$$P_R(b) = \sum_{a\in A} P_S(a) \cdot \Gamma_{a,b}, \qquad P_{S,R}(a, b) = P_S(a) \cdot \Gamma_{a,b}.$$

Z teorie pravděpodobnosti plyne, že pro dané S lze najít veličinu R tak, aby pár (R, S) měl předepsané rozdělení. Proto si dovolíme vnímat kanál jako transformátor náhodných veličin.

Smyslem komunikace je samozřejmě přenos informace. Proto naším cílem je poslat skrze komunikační kanál takovou veličinu S, aby výstupní veličina R měla s vyslanou zprávou co nejvíce společného. Toto triviální neformální konstatování vede matematicky k definici *kapacity* kanálu jako maximální vzájemné entropie mezi vyslaným symbolem a přijatým symbolem.

Definice 8.1. ***Kapacita*** *kanálu* Γ *je*

$$C(\Gamma) = \max_{(R,S)\sim\Gamma} \mathcal{I}(R : S) .$$

Všimněme si, že kapacita kanálu je definována pro kódování jednoho písmena. Teorie komunikačního kanálu se ale z velké části zajímá o to, jak se dají kanálem posílat delší zprávy. Jinými slovy, pro zvyšující se n nás bude zajímat, jak dobře kanál posílá slova z A^n. Budeme se tedy zabývat n-tou mocninou kanálu Γ^n, který takový přenos popisuje. Pro různá n tak dostáváme sérii kanálů pro posílání zprávy délky n a můžeme se ptát, jaká je informační hustota přenosu, neboli jakou maximální informaci sdílí v průměru zaslaný a obdržený symbol při posílání zprávy délky n, neboli nás zajímá

$$\frac{C(\Gamma^n)}{n}.$$

U bezpaměťového kanálu dokážeme, že je tento poměr konstantní, tedy že je roven kapacitě $C(\Gamma)$.

Úkol *kódování kanálu* je tedy dvojí:

- Nalézt takové rozdělení S vstupních symbolů, při kterém bude vzájemná informace mezi R a S (jejichž vztah je dán šumem) maximální. Uvědomme si ovšem, že definice vzájemné entropie je netriviální a nejen nedává žádný návod, jak informaci obsaženou v S na základě R získat, ale ani nezaručuje, že je to možné. Uvidíme, že to možné je, ale podobně jako v případě kódování bez šumu je k tomu nutné přenos opakovat a nekódovat právy po písmenech. Přestože je tedy chování kanálu i jeho kapacita definováno na jednom písmeni, dosažení kapacity bude vyžadovat kódování $A^n \to B^n$ pro dostatečně velká n.

- Uvědomme si dále, že se primárně nechceme dozvědět $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ale $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Cílem je tedy nalezení kódovacího a dekódovacího postupu, tedy způsobu, jak zakódovat proces $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tak, abychom ho mohli na základě $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ rekonstruovat. Jinak řečeno, chtěli bychom, aby „obsahem“ vzájemné entropie $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bylo právě $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Zde se ukazuje, proč se někdy vzájemná entropie nazývá sugestivně „vzájemná informace“. Méně názorným názvem „vzájemná entropie“ ovšem naznačujeme, že proces kódování a dekódování je netriviální.

  V případě, že proces $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ produkuje uniformně rozložené zprávy (což po kompresi do velké míry platí), to jednoduše znamená, že chceme zakódovat zprávy $Y_{[0..n)}$ takovými zprávami $S_{[0..n)}$, u kterých je malá pravděpodobnost

záměny. Z toho je vidět, proč se studium samoopravných kódů zaměřuje na maximalizaci vzdálenosti mezi kódovými slovy. V tomto přístupu je již mimo jiné skryt předpoklad kanálu bez paměti.

Hlavním výsledkem teorie kanálu jsou Shannonovy věty, podle kterých pro každý kanál existuje kódování blížící se libovolně k jeho kapacitě s libovolně malým nebezpečím chyby. Přesněji, je-li kapacita kanálu C, lze libovolný proces $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s entropií $\mathcal{H}\left((Y_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) < C$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ zakódovat nějakým procesem $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tak, že existuje dekódovací strategie umožňující z $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ získat $(\hat{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takové, že pravděpodobnost $\mathbb{P}\left(\hat{Y}_i \neq Y_i\right) < \varepsilon$. Naopak, každý pokus kapacitu kanálu překročit vede k chybám s pravděpodobností, kterou nelze snížit pod fixní mez. Tento výsledek je ekvivalentní výše uvedenému tvrzení, že v případě diskrétního kanálu bez paměti nelze kapacitu zvýšit tím, že budeme uvažovat více použití kanálu najednou.

Triviálním případem kanálu je *kanál bez šumu*, tedy identita (I tento případ se dá zapsat pomocí matice podmíněných pravděpodobností, konkrétně $\Gamma_{a,b} = 1$ pokud $a = b$, jinak je $\Gamma_{a,b} = 0$). Takový kanál bez šumu je schopný přenést D symbolů za jednotku času. Jak už jsme poznamenali, v tomto případě ani o kanálu či přenosu obvykle nehovoříme. Spíše bychom mluvili o prostorových než časových jednotkách, a spíše o ukládání než přenášení informace, což ovšem na věci nic nemění. Kapacitou takového kanálu je pak

$$C = \max_R \mathcal{I}(R : R) = \log D\,,$$

kde maximum je dosaženo rovnoměrným rozdělením. Chceme-li tuto kapacitu plně využít, potřebujeme zakódovat Y tak, aby jeden symbol obsahoval (v průměru) $\log D$ informace o Y. Jinak řečeno, průměrná délka kódu musí být $\mathcal{H}_D(Y)$. Z toho je vidět, že teorie komprese, kterou jsme se zabývali v předchozích třech kapitolách, ukazuje, jak takovýto kanál optimálně využít.

8.2 Kapacita opakovaného použití kanálu bez paměti

V předchozí kapitole jsme definovali kanál bez paměti neformálně jako opakované použití téhož kanálu, tedy kanálu se „stejným“ šumem, a také formálně pomocí vzorce pro přechodovou matici Γ^n. Nyní upřesníme, v jakém smyslu z formální definice plyne neformální „bezpaměťovost“.

V následujícím tvrzení je indexová množina J zbytečně obecná, ale důkaz indukcí je snadný.

Lemma 8.2 (Působení bezpaměťového kanálu na jednotlivé části vstupu)**.** *Buď Γ kanál bez paměti. Nechť Γ^n transformuje $S_{[0..n)}$ na $R_{[0..n)}$. Potom pro jakoukoliv podmnožinu indexů $J \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$, jakákoli písmena $v_j \in B$, $j \in J$ a jakékoli slovo $u \in A^n$ splňující $\mathbb{P}(S = u) > 0$ platí*

$$\mathbb{P}\left(R_i = v_i, i \in J \mid S_i = u_i, i \in J\right) = \mathbb{P}\left(R_i = v_i, i \in J \mid S = u\right) = \prod_{i\in J} \Gamma_{u_i,v_i}.$$

Platí tedy $(S_i, R_i)_{i\in J} \sim \Gamma^{|J|}$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí dle kardinality množiny J. Budeme sestupovat od $|J| = n$ až k $|J| = 1$. Pokud $|J| = n$, je tvrzení platné z definic. V indukčním kroku můžeme předpokládat, že tvrzení platí pro $J \cup \{j\}$, kde $j \notin J$. Nejprve dokážeme druhou rovnost:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R_i = v_i, i \in J \mid S = u\right) &= \sum_{b\in B} \mathbb{P}\left(R_i = v_i, i \in J \wedge v_j = b \mid S = u\right) \\ &= \sum_{b\in B}\left(\left(\prod_{i\in J} \Gamma_{u_i,v_i}\right)\cdot \Gamma_{u_j,b}\right) \\ &= \prod_{i\in J}\Gamma_{u_i,v_i}\cdot\sum_{b\in B}\Gamma_{u_j,b} = \prod_{i\in J}\Gamma_{u_i,v_i}\cdot 1.\end{aligned}$$

Pro libovolné pevné $u \in A^n$ máme tedy také

$$\mathbb{P}\left(R_i = v_i, i \in J, S = u\right) = \prod_{i\in J}\Gamma_{u_i,v_i}\cdot\mathbb{P}\left(S = u\right),$$

což využijeme v následujícím výpočtu. Označme $U = \{u' \in A^n \mid u'_j = u_j,\ j \in J\}$. První rovnost z tvrzení pak dostáváme takto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R_i = v_i, S_i = u_i, i \in J\right) &= \sum_{u'\in U}\mathbb{P}\left(R_i = v_i, i \in J, S = u'\right) \\ &= \sum_{u'\in U}\prod_{i\in J}\Gamma_{u_i,v_i}\cdot\mathbb{P}\left(S = u'\right) \\ &= \prod_{i\in J}\Gamma_{u_i,v_i}\cdot\sum_{u'\in U}\mathbb{P}\left(S = u'\right) \\ &= \prod_{i\in J}\Gamma_{u_i,v_i}\cdot\mathbb{P}\left(S_i = u_i, i \in J\right).\end{aligned}$$

Podělením obou stran rovnice pravděpodobností $\mathbb{P}\left(S_i = u_i, i \in J\right)$ dostaneme pro každé u splňující předpoklad nenulovosti $\mathbb{P}\left(S = u\right)$ kýženou rovnost. □

Tvrzení 8.3 (Bezpaměťovost mocnin kanálu)**.** *Uvažujme kanál* Γ^n. *Pro libovolná slova* $u \in A^n$, $v \in B^n$, *kde* $(u, v) \in s\,(S, R)$, *platí*

(1)

$$\mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right) = \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S = u\right) = \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid R_j = v_j, j \neq i, S = u\right) = \Gamma_{u_i,v_i},$$

(2)

$$\mathbb{P}\left(R = v \;\middle|\; S = u\right) = \prod_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(R_i = v_i \;\middle|\; S_i = u_i\right).$$

Důkaz. Platí

$$\mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid R_j = v_j, j \neq i, S = u\right) = \frac{\mathbb{P}\left(R = v, S = u\right)}{\mathbb{P}\left(R_j = v_j, j \neq i, S = u\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(R = v \mid S = u\right)}{\mathbb{P}\left(R_j = v_j, j \neq i \mid S = u\right)}$$
$$= \frac{\prod_{j\in[0..n)} \Gamma_{u_j,v_j}}{\prod_{j\in[0..n),j\neq i} \Gamma_{u_j,v_j}} = \Gamma_{u_i,v_i},$$

kde druhý řádek používá Lemma 8.2. Druhý bod plyne z prvního a z definice Γ^n. □

Vidíme, že mocnina kanálu odpovídá neformální intuici bezpaměťovosti. Kanál Γ^n se v čase i chová zcela nezávisle na tom, co se stalo (a stane) jindy. Poznamenejme, že existují i jiné kanály $A^n \to B^n$ než Γ^n, které pro které platí

$$\mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right) = \Gamma_{u_i,v_i},$$

ale chování v různých časech nejsou nezávislá.

Naším cílem je nyní zkoumat kapacitu mocniny kanálu. V teorii kanálu hraje centrální roli vzájemná informace dvou veličin S a R, proto nejprve blíže rozebereme její vlastnosti. Ukážeme, že podobně jako entropie je vzájemná informace monotónní, to znamená, že přidáním dalších veličin se vzájemná entropie nezmenší. Naopak, na rozdíl od entropie, není vzájemná informace obecně subadditivní. To ukážeme na příkladech, které mohou být v rozporu s prvotní intuicí.

Lemma 8.4 (Monotonie vzájemné entropie)**.** *Pro náhodné veličiny S_1, S_2, R_1, R_2 platí*

$$\mathcal{I}\left(S_1 : R_1\right) \leq \mathcal{I}\left(S_1 : (R_1, R_2)\right) \leq \mathcal{I}\left((S_1, S_2) : (R_1, R_2)\right).$$

Důkaz. Dvojí aplikací nerovnosti

$$\mathcal{I}(X : Y) = \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X \mid Y) \leq \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X \mid (Y, Z)) = \mathcal{I}(X : (Y, Z)),$$

která plyne z Lemmatu 3.36(2), spolu se symetrií vzájemné entropie. □

Známý případ po dvou nezávislých, ale po třech závislých veličin, dává příklad trochu podivného chování, konkrétně situace, kdy

$$0 = \mathcal{I}\left(S : R_1\right) + \mathcal{I}\left(S : R_2\right) < \mathcal{I}\left(S : (R_1, R_2)\right) = 1.$$

Konkrétně volíme R_1 a R_2 jako nezávislé veličiny, rovnoměrně rozdělené na množině $\{0, 1\}$, S je definováno předpisem $S = (R_1 + R_2) \mod 2$. Pokud bychom nerovnost četli neformálním způsobem, dostali bychom, že S nemá nic společného s R_1 ani s R_2, přesto má něco společného s dvojicí (R_1, R_2) (dokonce se dá z dvojice jednoznačně zrekonstruovat). Pokud položíme $S_1 = S$ a $S_2 = R_1$, dostaneme

$$0 = \mathcal{I}\left(S_1 : R_1\right) + \mathcal{I}\left(S_2 : R_2\right) < \mathcal{I}\left((S_1, S_2) : (R_1, R_2)\right) = 2.$$

Něco takového ovšem nemůže nastat, pokud $R_1 R_2$ je výstupem bezpaměťového kanálu pro vstup $S_1 S_2$. To plyne z obecnějšího tvrzení v následujícím lematu.

Lemma 8.5. *Nechť pro náhodné veličiny $S_{[0..n)}$ s hodnotami v A a $R_{[0..n)}$ s hodnotami v B platí*

$$\mathbb{P}\left(R_{[0..n)} = v \mid S_{[0..n)} = u\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right),$$

pro všechna $u \in A^n$, $v \in B^n$ taková, že $\mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u\right) > 0$. Potom

$$\mathcal{H}\left(R_{[0..n)} \mid S_{[0..n)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}\left(R_i \mid S_i\right).$$

Dále

$$\mathcal{I}\left(S_{[0..n)} : R_{[0..n)}\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{I}\left(S_i : R_i\right).$$

a rovnost nastane právě tehdy když jsou veličiny R_i, $i < n$, vzájemně nezávislé.

Důkaz. Označme $M = s\left(S_{[0..n)}, R_{[0..n)}\right)$. Pro pevné i a a, b platí

$$\mathbb{P}\left(S_i = a, R_i = b\right) = \sum_{(u,v)\in M, u_i = a, v_i = b} \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right).$$

Z předpokladu plyne,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(R_{[0..n)} \mid S_{[0..n)}\right) &= -\sum_{(u,v)\in M} \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right) \log \mathbb{P}\left(R_{[0..n)} = v \mid S_{[0..n)} = u\right) \\
&= -\sum_{(u,v)\in M} \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right) \log \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right) \\
&= -\sum_{(u,v)\in M} \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right) \sum_{i=0}^{n-1} \log \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(u,v)\in M} \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right) \log \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(a,b)\in s\left(P_{S_i,R_i}\right)} \sum_{(u,v)\in M, u_i = a, v_i = b} \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right) \log \mathbb{P}\left(R_i = b \mid S_i = a\right) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(a,b)\in s\left(P_{S_i,R_i}\right)} \mathbb{P}\left(S_i = a, R_i = b\right) \log \mathbb{P}\left(R_i = b \mid S_i = a\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}\left(R_i \mid S_i\right).
\end{aligned}$$

Pro vzájemnou informaci dostáváme,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\left(S_{[0..n)} : R_{[0..n)}\right) &= \mathcal{H}\left(R_{[0..n)}\right) - \mathcal{H}\left(R_{[0..n)} \mid S_{[0..n)}\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \mathcal{H}\left(R_i\right) - \sum_{i=0}^{n} \mathcal{H}\left(R_i \mid S_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{I}\left(S_i : R_i\right).\end{aligned}$$

V předchozím výpočtu jsme sdruženou entropii $\mathcal{H}\left(R_{[0..n)}\right)$ odhadli pomocí součtu entropií jednotlivých veličin R_i, $i < n$. Rovnost nastane právě tehdy když jsou R_i vzájemně nezávislé. □

Lemma 8.6. *Nechť pro náhodné veličiny $S_{[0..n)}$ s hodnotami v A a $R_{[0..n)}$ s hodnotami v B platí*

$$\mathbb{P}\left(R_{[0..n)} = v \mid S_{[0..n)} = u\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right),$$

pro všechna $u \in A^n$, $v \in B^n$ taková, že $\mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u\right) > 0$. Pokud jsou S_i, $i < n$, nezávislé, pak jsou i (S_i, R_i), $i < n$, a tedy i R_i, $i < n$, nezávislé.

Důkaz. Pokud $\mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u\right) > 0$, můžeme psát

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u, R_{[0..n)} = v\right) &= \mathbb{P}\left(R_{[0..n)} = v \mid S_{[0..n)} = u\right) \cdot \mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u\right) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_i = v_i \mid S_i = u_i\right) \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(S_i = u_i\right) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(R_i = v_i, S_i = u_i\right).\end{aligned}$$

Stejný vzorec platí v případě $\mathbb{P}\left(S_{[0..n)} = u\right) = 0$ triviálně. Proto jsou vektory (S_i, R_i), $i < n$, nezávislé a proto jsou nezávislé i samotné druhé složky R_i, $i < n$. □

Nyní můžeme dokázat kýženou větu. Uveďme nejprve (ještě jednou) její neformální formulaci.

- Opakované použití kanálu chápané jako jeden velký kanál nemá větší kapacitu než chápané jako jednotlivá použití kanálu původního.
- Kapacita opakovaného použití je dosažena, pokud každé jeho použití dosahuje kapacitu a vstupy jsou navíc nezávislé (tato podmínka není nutná, pouze postačující).

Tvrzení 8.7.

- *Pro všechna n platí, $C(\Gamma^n) = nC(\Gamma)$.*

- *Pokud* $\mathcal{I}(S : \Gamma(S)) = C(\Gamma)$*, pak pro i.i.d. posloupnost* S_i*,* $i < n$*, kde* S_i *má stejné rozdělení jako* S*, platí* $C(\Gamma^n) = \mathcal{I}\left((S_{[0..n)}) : \Gamma^n(S_{[0..n)})\right)$.

Důkaz. Buď $(S_{[0..n)}, R_{[0..n)}) \sim \Gamma^n$. Potom z Lemmatu 8.5 dostáváme

$$\mathcal{I}\left(S_{[0..n)} : R_{[0..n)}\right) \leq \sum_{i=0}^{n} \mathcal{I}\left(S_i : R_i\right) \leq nC(\Gamma).$$

Hodnota $nC(\Gamma)$ je tedy horním odhadem pro kapacitu Γ^n. Zbývá si tedy všimnout, že pro nezávislé veličiny maximalizující každé jednotlivé použití kanálu se tato hodnota dosahuje, což je předmětem druhé části tvrzení.

Buď $\mathcal{I}(S : \Gamma(S)) = C(\Gamma)$, buď S_i, $i < n$, i.i.d. posloupnost, kde S_i má stejné rozdělení jako S, a buď $R_{[0..n)} = \Gamma\left(S_{[0..n)}\right)$. Z nezávislosti S_i dostáváme díky Lemmatu 8.6 nezávislost R_i, a Lemma 8.5 dává rovnost namísto první nerovnosti ve výrazu výše. Protože S_i je pro každé $i < n$ stejně rozděleno jako S, dostáváme $\mathcal{I}\left(R_i : S_i\right) = C(\Gamma)$. Tím je tvrzení dokázané. □

8.3 Fanova nerovnost a věta o nepropustnosti kanálu

V této kapitole se budeme zabývat otázkou, zda se dá z daného kanálu odstranit šum. Začněme příkladem kanálu

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

V tomto kanálu je obsažen šum, čímž máme na mysli, že pro některá (v tomto případě všechna) písmena na vstupu jsou minimálně dvě možnosti, jaký bude výstup. Proto se zdá, že daným kanálem nelze posílat zprávy tak, aby se daly jednoznačně dekódovat. Přesto existuje způsob, jak šum „odfiltrovat“. Stačí neposílat všechna písmena, ale omezit se například jen na $\{a, c\}$. Ačkoliv jsou u každého z nich na výstupu možné dvě varianty, možné výstupy pro a se neprotínají s možnými výstupy pro c. Proto funkce f, daná předpisem $f(a) = f(b) = a$ a $f(c) = f(d) = c$, dekóduje (s pravděpodobností jedna) správně jakýkoliv zdroj S, které vysílá jen písmena a a c, t.j. $s(S) \subseteq \{a, c\}$. Pokud bychom chtěli vyjádřit, jak velkou informaci dokáže kanál přenést bezchybně, mohli bychom pro kvantifikaci přirozeně použít největší možnou entropii zdroje, který se dá bezchybně přenést. Vzhledem k tomu, že bezchybnost dostaneme vždy právě vhodným výběrem písmen, které budeme posílat, lze pak při maximalizaci uvažovat pouze zdroj s uniformním rozdělením na takové abecedě. Ten pak bude mít entropii rovnou velikosti množiny vybraných písmen. Dá se tedy říct, že maximalizace entropie zdroje je totožná s maximalizací velikosti vybrané množiny písmen, kde výběr garantuje bezchybné dekódování. Konkrétně

hledáme podmnožinu $A' \subseteq A$ s maximální velikostí takovou, aby různé vstupy z A' nemohly mít stejný výstup, t.j.

$$\big(\Gamma(a,b) > 0 \;\&\; \Gamma(a',b) > 0\big) \quad \Rightarrow \quad a = a'$$

pro všechna $a, a' \in A'$ a $b \in B$. Velikostí přenesené informace je pak logaritmus velikosti takové množiny, což odpovídá entropii zdroje S s rovnoměrným rozdělením na dané množině. Tato kvantita má okamžitou souvislost se vzájemnou informací a také s kapacitou kanálu. Kapacita kanálu je obecně horní mezí pro bezchybný přenos. Zároveň ukážeme, že schopnost „takřka“ bezchybného přenosu dlouhých zpráv se v limitě blíží kapacitě kanálu. Bohužel zde ale budeme muset opustit koncept zcela bezchybného přenosu a budeme muset připustit malou chybu. Problém bezchybného přenosu je vidět na jakémkoliv kanálu, který připouští věchny výstupy pro každý vstup, například

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix}.$$

Kapacitu kanálu $C(\Gamma) = 1 - \mathcal{H}(e, 1-e)$ realizuje uniformní zdroj S na celé vstupní abecedě. Pro malá e je kapacita blízká jedničce. Dá se lehce nahlédnout, že je matice Γ^n nenulová na všech pozicích, a proto nelze najít ani dva různé vstupy, zprávy z A^n, jejichž možné výstupy by se neprotínaly a daly se tak jednoznačně odlišit podle výstupu. Pro dané n nelze bezchybně poslat dvě různé zprávy, a proto je schopnost bezchybného posílání zpráv nulová. To je ale vzdálené kapacitě kanálu, která roste lineárně do nekonečna dle Tvrzení 8.7.

Jak jsme již řekli, ukážeme, že připuštění určité chyby, libovolně malé, tedy umožní přenos informace s asymptotickou efektivitou danou kapacitou kanálu $C(\Gamma)$. Zároveň ukážeme, že pokud budeme chtít velmi malou chybu přenosu, nebude možné posílat informaci rychlejším tempem než je kapacita kanálu. Kapacita kanálu se tak opravdu stává vhodnou kvantifikací schopnosti kanálu přenášet informace.

Pro přesné vyslovení a důkazy vět nejprve uveďme přesné definice toho, co jsme již v úvodu zmínili. V dalším textu se budeme snažit odhadovat zdroj S z výstupu R pomocí funkce odhadu $f : B \to A$. Definujme pravděpodobnost chyby odhadu $a \in A$ a průměrnou pravděpodobnost chyby odhadu vzorci

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{S|R}(f,a) &= \mathbb{P}\left(f(R) \neq a \mid S = a\right) = \sum_{b \in B, f(b) \neq a} \frac{P_{S,R}(a,b)}{P_S(a)} \\
\mathcal{E}_{S|R}(f) &= \mathbb{P}\left(f(R) \neq S\right) = \sum_{a \in A} \mathcal{E}_{S|R}(f,a) \cdot P_S(a) = 1 - \sum_{b \in B} P_{S,R}(f(b),b) \\
\mathcal{E}_{S|R} &= \min\{\mathcal{E}_{S|R}(f) : \; f : B \to A\}
\end{aligned}$$

Říkáme, že náhodná veličina $S : \Omega \to A$ je určena náhodnou veličinou $R : \Omega \to B$, pokud $\mathcal{E}_{S|R} = 0$. To je ekvivalentní tomu, že existuje takové f, pro které $f(R) = S$ s pravděpodobností jedna – tedy spolehlivé, bezchybné dekódování.

Pro kanál $\Gamma = \left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A, b\in B}$ definujme kapacitu přenosu s chybou ε předpisem

$$C_\varepsilon(\Gamma) = \max\{\mathcal{H}(S) \mid S : \Omega \to A,\ \ \mathcal{E}_{S|\Gamma(S)} \leq \varepsilon\}.$$

Rychlostí přenosu rozumíme $\mathcal{H}(S)$, je to (v souladu s významem entropie) průměrné množství informace na jeden symbol.

Tvrzení 8.8. *Nechť $R, S : \Omega \to A$ jsou náhodné veličiny. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *S je určena náhodnou veličinou R,*
2. *$\mathcal{H}(S \mid R) = 0$,*
3. *$\mathcal{I}(S : R) = \mathcal{H}(S)$.*

Důkaz. Ekvivalence druhé a třetí podmínky plyne z řetězového pravidla $\mathcal{I}(S : R) = \mathcal{H}(S) - \mathcal{H}(S \mid R)$. Podle definice je $\mathcal{H}(S \mid R) = \sum_{b\in B} \mathcal{H}(S \mid R = b) \cdot \mathbb{P}(R = b)$. Je-li $\mathcal{H}(S \mid R) = 0$, musí být každé $\mathcal{H}(S \mid R = b)$ nulové, takže příslušný sloupec matice podmíněných pravděpodobností obsahuje jedinou jednotku. To znamená že existuje $a = f(b)$ pro které $\mathbb{P}(S = f(b) \mid R = b) = 1$ a tedy také $\mathbb{P}(S = f(R)) = 1$. Naopak je-li $\mathbb{P}(S = f(R)) = 1$, je $\mathcal{H}(S \mid R = b) = 0$ pro každé $b \in B$ a tedy také $\mathcal{H}(S \mid R) = 0$. □

Důsledkem je, že kapacita kanálu je nejméně kapacita bezchybného přenosu.

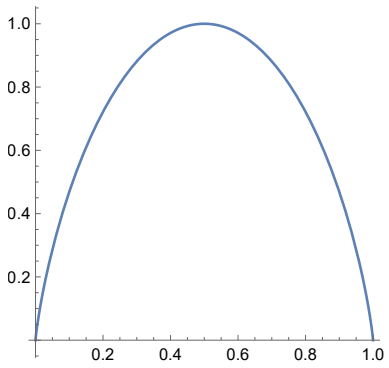
Důsledek 8.9. *Pro kanál Γ platí $C_0(\Gamma) \leq C(\Gamma)$.*

Už jsme konstatovali, že kapacita může být ostře větší. Pak nemůže být dosažena bez připuštění (asymptoticky malé) chyby.

Pro $x \in [0, 1]$ položme

$$h(x) = \mathcal{H}(x, 1 - x) = -x \cdot \log(x) - (1 - x) \cdot \log(1 - x),$$

kde v krajních bodech definujeme (spojitým rozšířením) $h(0) = h(1) = 0$.



Tvrzení 8.10 (Fanova nerovnost)**.** *Nechť $S, S' : \Omega \to A$ jsou náhodné veličiny. Pak*

$$\mathcal{H}\left(S \mid S'\right) \leq h(\mathbb{P}\left(S \neq S'\right)) + \mathbb{P}\left(S \neq S'\right) \log(|A| - 1).$$

Důkaz. Definujme

$$E(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pokud} \quad S'(\omega) = S(\omega) \\ 1 & \text{pokud} \quad S'(\omega) \neq S(\omega). \end{cases}$$

Pro E jakožto binární veličinu platí

$$\mathcal{H}(E) = h\left(\mathbb{P}\left(S \neq S'\right)\right).$$

Pokud fixujeme $S' = a$ a $E = 1$, pak se jistě S nerovná a. Tedy pro S zbývá na výběr z $|A| - 1$ hodnot. Z Tvrzení 3.21 aplikovaného na rozdělení $P_{S|S'=a,E=1}$ na $A \setminus \{a\}$ tak dostáváme

$$\mathcal{H}\left(S \mid S' = a, E = 1\right) \leq \log(|A| - 1).$$

(Pozor, $\mathcal{H}(S \mid S' = a, E = 1)$ může být větší než $\mathcal{H}(S)$.)

Celkově tedy platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(S \mid S', E\right) &= \sum_{(a,i) \in s\left(P_{S',E}\right)} \mathbb{P}\left(S' = a, E = i\right) \cdot \mathcal{H}\left(S \mid (S', E) = (a, i)\right) \\
&= \sum_{(a,0) \in s\left(P_{S',E}\right)} \mathbb{P}\left(S' = a, E = 0\right) \cdot \mathcal{H}\left(S \mid (S', E) = (a, 0)\right) \\
&\quad + \sum_{(a,1) \in s\left(P_{S',E}\right)} \mathbb{P}\left(S' = a, E = 1\right) \cdot \mathcal{H}\left(S \mid (S', E) = (a, 1)\right) \\
&\leq 0 + \sum_{(a,1) \in s\left(P_{S',E}\right)} \mathbb{P}\left(S' = a, E = 1\right) \cdot \log(|A| - 1) \\
&= \mathbb{P}(E = 1) \cdot \log(|A| - 1) = \mathbb{P}\left(S \neq S'\right) \cdot \log(|A| - 1).
\end{aligned}$$

Zároveň platí $\mathcal{H}(E \mid S, S') = 0$, neboť E je určena veličinou (S, S'). Proto $\mathcal{H}(S, S') = \mathcal{H}(E, S, S')$ a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(S \mid S'\right) &= \mathcal{H}\left(S, S'\right) - \mathcal{H}\left(S'\right) = \mathcal{H}\left(E, S, S'\right) - \mathcal{H}\left(S'\right) = \mathcal{H}\left(S \mid S', E\right) + \mathcal{H}\left(S', E\right) - \mathcal{H}\left(S'\right) = \\
&= \mathcal{H}\left(S \mid S', E\right) + \mathcal{H}\left(E \mid S'\right) \leq \mathcal{H}\left(S \mid S', E\right) + \mathcal{H}(E) \leq \\
&\leq
\end{aligned}$$

□

Důsledek 8.11 (Fanova nerovnost pro odhad)**.** *Nechť $S : \Omega \to A$, $R : \Omega \to B$ jsou náhodné veličiny, $f : B \to A$. Pak*

$$\mathcal{H}(S \mid R) \leq h(\mathcal{E}_{S|R}(f)) + \mathcal{E}_{S|R}(f) \cdot \log(|A| - 1).$$

Tedy

$$\mathcal{H}(S \mid R) \leq h(\mathcal{E}_{S|R}) + \mathcal{E}_{S|R} \cdot \log(|A| - 1).$$

Důkaz. S využitím předchozího tvrzení dostáváme:

$$\mathcal{H}(S \mid f(R)) \leq h(\mathcal{E}_{S|R}(f)) + \mathcal{E}_{S|R}(f) \cdot \log(|A| - 1).$$

Navíc

$$\mathcal{H}(S|R) = \mathcal{H}(S,R) - \mathcal{H}(R) = \mathcal{H}(S,R,f(R)) - \mathcal{H}(R,f(R)) = \mathcal{H}(S|R,f(R)) \leq \mathcal{H}(S|f(R)).$$

Dokázali jsme tedy první část důsledku. Druhá část je jen aplikací první části na optimální odhad $f : B \to A$. □

Tvrzení 8.12. *Pro kanál* $\left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A,b\in B}$ *a* $\varepsilon \leq 1/2$ *platí*

$$C_\varepsilon(\Gamma) \leq C(\Gamma) + h(\varepsilon) + \varepsilon \cdot \log(|A| - 1).$$

Důkaz. Buď R, S vstup a výstup pro kanál Γ, $f(R)$ odhad pro S a to tak, aby platilo $C_\varepsilon(\Gamma) = \mathcal{H}(S)$ a $\mathcal{E}_{S|R}(f) \leq \varepsilon$. Platí

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(\Gamma) &= \mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(S \mid R) + \mathcal{I}(S : R) \leq \\ &\leq h(\mathcal{E}_{S|R}(f)) + \mathcal{E}_{S|R}(f) \cdot \log(|A| - 1) + C(\Gamma) \leq h(\varepsilon) + \varepsilon \cdot \log(|A| - 1) + C(\Gamma). \end{aligned}$$

Podmínka $\varepsilon \leq 1/2$ je volena proto, abychom dostali nerovnost $h(\mathcal{E}_{S|R}(f)) \leq h(\varepsilon)$, neboť $h(x)$ je rostoucí pouze na $[0, 1/2]$. □

Věta 8.13 (Shannonova věta o nepropustnosti kanálu)**.** *Uvažujme kanál* $\left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A,b\in B}$ *a zvolme nezáporné* $\varepsilon \leq 1/2$*. Pak pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\frac{C_\varepsilon(\Gamma^n)}{n} \leq C(\Gamma) + \frac{h(\varepsilon)}{n} + \varepsilon \cdot \log|A|.$$

Důkaz. Platí

$$C_\varepsilon(\Gamma^n) \leq h(\varepsilon) + \varepsilon \cdot \log(|A^n| - 1) + C(\Gamma^n) \leq h(\varepsilon) + n \cdot \varepsilon \cdot \log|A| + n \cdot C(\Gamma).$$

□

Jinak se také dá vyjádřit předchozí výsledek také takto:

Věta 8.14 (Shannonova věta o nepropustnosti kanálu, verze 2)**.** *Pro kanál* $\left(\Gamma_{a,b}\right)_{a\in A,b\in B}$ *a náhodné veličiny* $S_n : \Omega \to A^n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{S_n|\Gamma^n(S_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{H}\left(S_n\right)}{n} \leq C(\Gamma).$$

Zde je dobré si připomenout, že (S_n) je posloupnost rozdělení pro zprávy rostoucí délky, přičemž pro každou délku se snažíme vždy znovu najít co nejlepší rozdělení. Nejde tedy jen o opakování téže veličiny S.

Výše uvedené věty jsou v literatuře obvykle označovány jako „slabá inverzní forma věty o kódování kanálu“ (weak converse of the Chanel Coding Theorem). „Inverzní“ proto, že mluví o nemožnosti překročit kapacitu. Zde tuto inverznost vyjadřujeme záporem ve slově „nepropustnost“. „Slabá“ proto, že nezkoumá otázku, co se stane, pokud nějakou malou chybu připustíme. Zbývá totiž otázka, jaká je kapacita kanálu, pokud asymptoticky připustíme nějakou malou chybu ε, tedy pokud uvažujeme

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_{S_n|\Gamma^n(S_n)} \to \varepsilon\,.$$

Lze za této podmínky rychlost přenosu asymptoticky zvýšit? To by znamenalo najít posloupnost veličin (S_n) splňujících tuto podmínku tak, že

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{H}\left(S_n\right)}{n} = C(\Gamma) + \delta$$

pro nějaké $\delta > 0$. Odpověď na tuto otázku je komplikovanější. V jistém smyslu taková možnost existuje. Pokud ale např. požadujeme, aby k malé chybě dekódování docházelo u všech zpráv (nejen v průměru), pak nelze kapacitu překročit vůbec: chyba při trvalém použití kanálu nad jeho kapacitu roste u většiny zpráv (prosté většiny, nikoli pravděpodobnostní) k jedné. Podrobnostmi této silné konverzní věty se v této přednášce nezabýváme.

8.4 Dosažení kapacity kanálu

Dosáhnout kapacitu kanálu znamená najít kód, tedy rozložení vstupní posloupnosti $S^{(n)} = \left(S_i\right)_{i=1}^{n}$, který má hustotu přenosu alespoň $C(\Gamma) - \delta$ a průměrnou chybu dekódování nejvýše ε pro předem zvolené parametry $\varepsilon, \delta > 0$. Shannonova věta o kódování kanálu říká, že je to možné pro libovolné $\varepsilon, \delta > 0$, pokud je n větší než $n_{\varepsilon,\delta}$. Hustota přenosu je přitom $\mathcal{H}\left(S^{(n)}\right)/n$, tedy průměrný počet bitů na jeden symbol. Takovému kódování se říká obvykle „samoopravné“ právě proto, že zatímco kanál zprávu modifikuje, dekódování je prakticky bezchybné.

Pro představu o tom, co takové kódování znamená, je výhodné (a obvyklé) si představovat vysílané zprávy jako množinu o velikosti m s rovnoměrným rozdělením, které jsou přiřazena slova z množiny A^n, nebo rovnou jako tuto množinu m rovnoměrně rozdělených „kódových slov“ z A^n. Informační obsah jednoho slova je pak samozřejmě $\log m$ a hustota přenosu je $(\log m)/n$.

V kontextu naší přednášky je důležité připomenout souvislost tohoto pohledu s obecným pohledem pracujícím s entropií procesu $S^{(n)}$. Tato souvislost je dána „kódováním zdroje“, tedy *kompresí* procesu $S^{(n)}$ jehož výstupem je (opět asymptoticky), právě množina

$$m \doteq 2^{\mathcal{H}(S^{(n)})}$$

rovnoměrně rozložených „zpráv“. To je možné udělat vždy. Skutečnost, že těmto zprávám poté jednoduše přiřazujeme delší kódová slova (např. přidáváním *kontrolních bitů*), ovšem již závisí na předpokladu, že kapacita kanálu je dosažena rovnoměrným rozdělením vstupů. Ukážeme, že i tento předpoklad lze ospravedlnit, totiž že kapacitu kanálu lze asymptoticky dosáhnout právě rovnoměrně rozdělenými kódovými slovy, a to i pro kanály, které nejsou symetrické, a pro které tedy teoretická kapacita *jednoho použití* rovnoměrným rozdělením dosažena není. Hledání vhodného kódu je pak prostě hledáním vhodné množiny kódových slov dané velikosti, čímž teorie samoopravných kódů získává spíše kombinatorický charakter a teorie informace v pozadí se pak často přehlíží. Možnost uvažovat rovnoměrně rozdělené kódy, jak uvidíme, opět úzce souvisí s vlastnostmi typické množiny (a s vlastností AEP).

Ilustrujme nyní základní myšlenku samoopravných kódů právě na jednoduchém příkladu binárního symetrického kanálu s pravděpodobností chyby e, tedy

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix}.$$

Ochrana před chybami spočívá ve volbě kódových slov, která jsou od sebe dostatečně daleko tak, aby přijatá zpráva po přenosu byla ze všech kódových slov nejblíže zprávě vyslané. To vede k pojmu *diskrétní koule* $B_d(s)$ se středem s, což je množina slov, které se od s liší na méně než d místech. Střední hodnota počtu chyb při přenosu slova délky n je en. Ze zákona velkých čísel plyne, že pravděpodobnost více než $n(e+\varepsilon)$ chyb konverguje k nule pro $n \to \infty$. Malé pravděpodobnosti chyby při přenosu m zpráv lze tedy dosáhnout kódem $K_m \subseteq A^n$, pro který jsou množiny $\{B_{n(e+\varepsilon)}(u) :$

$u \in K_m\}$ navzájem disjunktní. Základní otázkou samoopravných kódů je v tomto případě nalezení takové množiny, tedy vměstnání m koulí do prostoru A^n. Objem prvků koule s poloměrem ne lze aproximovat jako

$$B_{ne}(s) = 1 + n + \cdots + \binom{n}{ne} \approx \binom{n}{ne} \approx 2^{n \cdot h(e)}$$

Odtud $m = |K_m| \approx 2^n / 2^{n \cdot h(e)} = 2^{n \cdot C(\Gamma)}$, takže $\log m/n \approx C(R)$. Tento heuristický argument dává horní mez na rychlost přenosu. Shannonova věta o kapacitě kanálu říká, že pro velká n se lze této mezi libovolně přiblížit.

*

V důkazu obecné podoby Shannonovy věty hraje klíčovou roli *typická množina* rozdělení P_A, o které již byla řeč v Kapitole 4. Je to množina

$$\mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_A\right) = \left\{ x \in A^n : \left| \mathcal{H}\left(P_A\right) + \frac{1}{n} \log \prod_{i=0}^{n-1} P_A\left(x_i\right) \right| < \varepsilon \right\},$$

tedy množina slov délky n, jejichž informační obsah na jeden symbol je ε-blízko entropii rozdělení. (Připomeňme, že část této množiny tvoří slova „frekvenčně typická“, tedy slova, ve kterých má každé písmeno zhruba očekávanou frekvenci. Množina ale obsahuje i jiná slova, jak jsme viděli a jak názorně ilustruje i následující příklad.)

Pojem typické množiny rozšíříme na *dvě rozdělení* následující definicí.

Definice 8.15. Společná typická množina *rozložení* $P = (P(a,b))_{a \in A, b \in B}$ *na* $A \times B$ *s marginálními rozloženími* P_A *na* A *a* P_B *na* B *je*

$$\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P) = \left(\mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_A\right) \times \mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_B\right)\right) \cap \mathcal{M}_\varepsilon^n(P).$$

Společná typická množina je částí $A^n \times B^n$, přičemž každý její prvek (u, v) je typický ve trojím smyslu:

- u je typickou hodnotou rozdělení P_A,
- v je typickou hodnotou rozdělení P_B, a
- (u, v) je navíc typickou kombinací pro sdružené rozdělení P.

V případě, který nás zajímá, tedy pokud $P = (S, \Gamma(S))$, vyjadřuje společná typická množina typickou událost přenosu: je vybrána typická zpráva a ta je očekávaným způsobem přenesena na typické slovo výstupu. Všimněme si, že netypické přenosy zahrnují i následující situace:

- Je vyslána netypická zpráva (byť třeba přenos proběhne typickým způsobem);

- Je vyslána i přijata typická zpráva, ale přenos proběhl netypicky. Přijatá zpráva může být např. typická pro jiné typické vyslané slovo.
- Je vyslána typická zpráva, je přenesena typickým způsobem, ale výsledná zpráva je netypická. Tato situace je nejméně intuitivní, ale pro zprávu i chybu, které jsou na hranici typičnosti, se může stát, že se netypické rysy zprávy i přenosu zkombinují tak, že je výsledek netypický.

8.4.1 Příklad

Ze skript PK (str. 91n.) přebíráme následující příklad. Uvažujme asymetrický kanál

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ s & 1-s \end{pmatrix}.$$

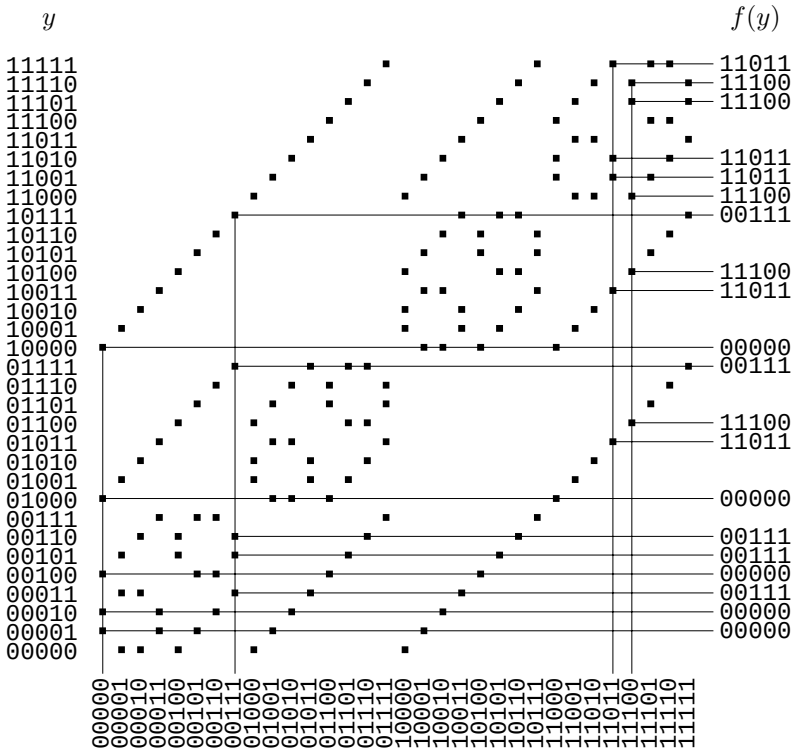
Pro $r = 0.19$ a $s = 0.21$ je kapacita $C(\Gamma) = 0.278$, optimální vstupní rozložení $P_A = (0.503, 0.497)$, čemuž odpovídá $P_B = (0.512, 0.488)$ (zaokrouhlené hodnoty, pro analýzu kapacity viz PK, Příklad 20, str. 89). Zvolme kódovou množinu

$$K = \{00000, 00111, 11011, 11100\},$$

pro kterou se libovolné dva prvky liší na alespoň třech místech. Koule $B_2(u), u \in K$, jsou tedy disjunktní. Tímto způsobem budeme tedy kódovat dva bity informace do pěti symbolů a rychlost přenosu bude $2/5$. Chyba dekódování je shora odhadnuta pravděpodobností výskytu dvou a více chyb, což je zhruba 0.26. Kapacita kanálu s touto chybou je odhadnuta Fanovou nerovností jako 0.62 bitu na symbol.

Na Obrázku 8 jsou prvky společně typické množiny $\mathcal{M}^5_{0.05}$ vyznačeny čtverečky, kde vodorovná osa obsahuje vyslanou posloupnost a svislá přijatou posloupnost y. Jedná se o všechny dvojice (u, v), které se liší právě na jednom místě. Všimněme, že všechna slova v A^5 i B^5 jsou typická (přestože samozřejmě mnoho slov není frekvenčně typických!), protože informační obsah obou písmen je velmi podobný. Pravděpodobnost změny písmene je 0.19 respektive 0.21. Není proto překvapivé (a lze snadno spočítat), že typické jsou právě ty dvojice z $A^5 \times B^5$, které se liší o jedno písmeno.

Obrázek také ukazuje dekódovací funkci odhadu f, o které bude řeč v důkazu Shannonovy věty. Dekódování je založeno na snaze najít k přijatému y takové $f(y) \in K$, aby $(f(y), y)$ byla společně typická dvojice. Vidíme, že pro každé přijaté y existuje nejvýše jedno takové $f(y)$. Pro řadu případů však žádné takové $f(y)$ neexistuje a dekódování v takovém případě selže. Pokud např. přijmeme 00111, pak existuje celkem pět vzorů, které představují typický přenos, ale žádný z nich neleží v K. Prohlásíme tedy, že neumíme dekódovat. (Výstup můžeme v takovém případě zvolit jinak, ale je přehlednější takové případy považovat rovnou za chybné dekódování.) Víme nicméně, že k takovým „netypickým“ situacím nebude docházet příliš často.



Obrázek 8: Typická množina

8.4.2 Vlastnosti společně typické množiny

Pro důkaz Shannonovy věty o propustnosti kanálu, budou klíčové vlastnosti společně typické množiny, které kvantifikujeme v Tvrzení 8.17. Nejprve uveďme důsledek vlastnosti asymptoticky rovnoměrného rozložení pro i.i.d proces.

Připomeňme, že pro $P \in \Delta(A)$ je $P^n \in \Delta(A^n)$ definováno jako součin pravděpodobností písmen, a pro $M \subseteq A^n$ je $P^n(M) = \sum_{u \in M} P^n(u)$.

Věta 8.16 (o typické množině)**.** *Pro každé $\delta, \varepsilon > 0$ a pro každé dosti velké $n > n_{\delta,\varepsilon}$ platí*

$$(1-\delta) \cdot 2^{n \cdot (\mathcal{H}(P)-\varepsilon)} \leq \left|\mathcal{M}_\varepsilon^n(P)\right| \leq 2^{n \cdot (\mathcal{H}(P)+\varepsilon)}, \quad P^n\left(\mathcal{M}_\varepsilon^n(P)\right) > 1-\delta$$

Důkaz. Nechť X je i.i.d. proces s rozložením P. Z Tvrzení 4.10 o rovnoměrném rozdělení, v jeho slabší verzi konvergence v pravděpodobnosti, bezprostředně plyne $\mathbb{P}\left(X_{[0..n)} \in \mathcal{M}_\varepsilon^n(P)\right) > 1-\delta$ pro všechna dosti velká n. Dále

$$1 \geq \sum_{u \in \mathcal{M}_\varepsilon^n(P)} P^n(u) \geq |\mathcal{M}_\varepsilon^n(P)| \cdot 2^{-n(\mathcal{H}(P)+\varepsilon)}$$

$$1-\delta \leq \sum_{u \in \mathcal{M}_\varepsilon^n(P)} P^n(u) \leq |\mathcal{M}_\varepsilon^n(P)| \cdot 2^{-n(\mathcal{H}(P)-\varepsilon)}.$$

□

Tvrzení 8.17 (O společně typické množině)**.** *Nechť*

$$(X,Y) = \left(\left(X_i, Y_i\right) : \Omega \to A \times B\right)_{i<n}$$

je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozložením P na $A \times B$ a marginálními rozloženími P_A a P_B a nechť

$$\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right) = \left(\left(\widetilde{X}_i,\widetilde{Y}_i\right) : \Omega \to A \times B\right)_{i<n}$$

je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozložením

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{X}_i = a, \widetilde{Y}_i = b\right) = P_A(a)\, P_B(b)\,.$$

Pak pro každé $\varepsilon, \delta > 0$ existuje $n_{\delta,\varepsilon}$ takové, že pro všechna $n > n_{\delta,\varepsilon}$ platí

(1) $\mathbb{P}\left((X,Y) \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right) > 1-\delta$

(2) $(1-\delta)\cdot 2^{n\left(\mathcal{H}(P)-\varepsilon\right)} \le \left|\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right| \le 2^{n\left(\mathcal{H}(P)+\varepsilon\right)}$

(3) $(1-\delta)\cdot 2^{-n\left(\mathcal{I}\left(P_A:P_B\right)+3\varepsilon\right)} \le \mathbb{P}\left(\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right) \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right) \le 2^{-n\left(\mathcal{I}\left(P_A:P_B\right)-3\varepsilon\right)}$

Důkaz.
(1) Podle Věty 8.16 o rovnoměrném rozložení pro všechna dosti velká n platí

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_A\right)\right) > 1-\tfrac{\delta}{3},\quad \mathbb{P}\left(Y \in \mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_B\right)\right) > 1-\tfrac{\delta}{3},\quad \mathbb{P}\left((X,Y) \in \mathcal{M}_\varepsilon^n(P)\right) > 1-\tfrac{\delta}{3}$$

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \notin \overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right) \le \mathbb{P}\left(X \notin \mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_A\right)\right)+\mathbb{P}\left(Y \notin \mathcal{M}_\varepsilon^n\left(P_B\right)\right)+\mathbb{P}\left((X,Y) \notin \mathcal{M}_\varepsilon^n(P)\right) \le \delta.$$

(2a) Podle Tvrzení 8.16 je $\left|\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right| \le \left|\mathcal{M}_\varepsilon^n(P)\right| \le 2^{n\left(\mathcal{H}(P)+\varepsilon\right)}$.
(2b) Naopak je-li $\mathbb{P}\left((X,Y) \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right) > 1-\delta$, je

$$(1-\delta) \le \sum_{(x,y)\in\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)} P^n(x,y) \le \left|\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right| \cdot 2^{-n\left(\mathcal{H}(P)-\varepsilon\right)}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right) \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right) &= \sum_{(x,y)\in\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)} P_A^n(x)\, P_B^n(y) \;\le\; \left|\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right| \cdot 2^{-n\left(\mathcal{H}\left(X_0\right)+\mathcal{H}\left(Y_0\right)-2\varepsilon\right)} \\
&\le 2^{n\left(\mathcal{H}(P)-\mathcal{H}\left(X_0\right)-\mathcal{H}\left(Y_0\right)+3\varepsilon\right)} = 2^{-n\left(\mathcal{I}\left(P_A:P_B\right)-3\varepsilon\right)} \\
\mathbb{P}\left(\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right) \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right) &= \sum_{(x,y)\in\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)} P_A^n(x)\, P_B^n(y) \;\ge\; \left|\overline{\mathcal{M}_\varepsilon^n}(P)\right| \cdot 2^{-n\left(\mathcal{H}\left(X_0\right)+\mathcal{H}\left(Y_0\right)+2\varepsilon\right)} \\
&\ge (1-\delta)\cdot 2^{n\left(\mathcal{H}(P)-\mathcal{H}\left(X_0\right)-\mathcal{H}\left(Y_0\right)-3\varepsilon\right)} \\
&= (1-\delta)\cdot 2^{-n\left(\mathcal{I}\left(P_A:P_B\right)+3\varepsilon\right)}.
\end{aligned}$$

□

8.4.3 Shannonova věta o kapacitě kanálu

Věta 8.18 (Shannon)**.** *Nechť Γ je informační kanál s kladnou kapacitou, $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 > 0$, tak že pro každé $n \geq n_0$ existuje náhodná veličina $S^{(n)} : \Omega \to A^n$ taková, že platí*

$$\mathcal{E}_{S^{(n)}} < \varepsilon, \quad \frac{\mathcal{H}\left(S^{(n)}\right)}{n} > C(\Gamma) - \varepsilon .$$

Náhodnou veličinu $S^{(n)}$ lze volit tak, že je rovnoměrně rozložená na nějaké podmnožině $K_n \subseteq A^n$, tedy že máme $|K_n|$ zpráv délky n takových, že každou z nich lze dekódovat s pravděpodobností chyby nejvýše ε a zároveň jejich počet roste exponenciálně s parametrem $C(\Gamma)$, konkrétně

$$\frac{\log |K_n|}{n} > C(\Gamma) - \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť S je náhodná veličina, která realizuje kapacitu kanálu, tedy

$$C(\Gamma) = \mathcal{I}(S : \Gamma(S)) .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ položme $\delta = \varepsilon/5$, zvolme $n > n_{\delta,\delta}$ z Tvrzení 8.17, které navíc splňuje

$$n > 1/\delta \quad \text{a} \quad 2^{-n\delta} < \delta .$$

Význam těchto podmínek se ukáže v průběhu důkazu.

Zvolme

$$m = \left\lceil 2^{n(C(\Gamma)-4\delta)} \right\rceil .$$

Množina K_n, která bude oborem hodnot uniformně náhodně rozdělené veličiny $S^{(n)}$, bude mít velikost alespoň $m/2$ a obdržíme ji ve dvou krocích: nejprve zvolíme (multi)množinu K'_n o velikosti m a z ní poté vybereme nejméně polovinu nejvhodnějších slov. Množinu K'_n si můžeme představit jako matici $S = S_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, písmen z A. $S_{i,j}$ je tedy j-té písmeno i-tého kódového slova.

Klíčovou myšlenkou důkazu je, že matici S budeme volit náhodně v souladu s rozdělením S, přesněji jako $m \cdot n$ nezávislých veličin s rozdělením S. Je důležité si uvědomit, že tato náhodná volba S je nástrojem pro důkaz věty pomocí pravděpodobnostního argumentu. Chceme ukázat, že nějaký vhodný kód existuje. Pro přenos pak již budeme používat vhodně zvolený kód K_n (vybranou polovinu vybraného S). To je také naznačeno volbou značení: matici S vnímáme jako náhodnou veličinu, zatímco $K'_n \in A^{nm}$ je jedna z jí nabývaných hodnot. V průběhu důkazu budeme ovšem náhodný jev volby kódu a náhodný jev volby zprávy (a tedy kódového slova z již zvoleného kódu) šikovně kombinovat. To je možné díky předpokladu, že volba zprávy, jakožto volba z množiny indexů $\{1, \ldots |K_n|\}$, je na používaném kódu nezávislá. Volba slova, které budeme přenášet, je tedy kombinací dvou náhodných jevů: volby kódu K_n a (uniformně náhodné) volby zprávy i z množiny $\{1, \ldots, |K_n|\}$.

Při volbě kódových slov se může stát, že totéž slovo je zvoleno vícekrát. Aby nám tato možnost nekomplikovala úvahy o velikosti množiny K'_n, budeme K'_n chápat

jako multimnožinu, tedy jako zobrazení $\{1, \ldots, m\} \to A^n$, které nemusí být prosté, a $K'_n(i)$ značí i-té kódové slovo. Dvě stejná kódová slova pak znamenají, že dvě různé zprávy jsou kódovány stejným slovem. Tato možnost bude v následujících úvahách speciálním případem neúspěšného přenosu.

Podívejme se nyní na pravděpodobnost chyb dekódování námi zvoleného kódu. K tomu je nejprve nutné určit dekódovací funkci odhadu $f : B^n \to A^n$. Přijaté slovo $y \in B^n$ budeme dekódovat takto: Pokud existuje právě jeden index i splňující splňující

$$\left(K'_n(i), y\right) \in \overline{\mathcal{M}^n_\delta}(S, \Gamma(S)) ,$$

pak položíme $f(y) = K'_n(i)$. Pokud takový index neexistuje nebo je jich víc, vyhlásíme selhání. (Případně nějaké vhodné $f(y)$ zvolíme, ale pro účely následujícího odhadu počítáme takovou situaci pro jednoduchost mezi chybná dekódování.) Neformálně řečeno, dekódování vychází z předpokladu, že dochází pouze k jednoznačně určeným typickým situacím.

Nechť je vyslána i-tá zpráva, tedy slovo $u = K'_n(i)$, které je hodnotou náhodné veličiny $S_i = \left(S_{i,1}, \ldots, S_{i,n}\right)$. Podle definice dekódování může dojít ke dvěma (vzájemně se nevylučujícím) událostem vedoucím k chybě:

- $\left(K'_n(i), \Gamma^n(u)\right) \notin \overline{\mathcal{M}^n_\delta}(S, \Gamma(S))$ nebo
- $\left(K'_n(j), \Gamma^n(u)\right) \in \overline{\mathcal{M}^n_\delta}(S, \Gamma(S))$ pro nějaké $j \neq i$.

Pro pravděpodobnost P_i chyby při přenosu i-té zprávy tedy dostáváme následující odhad (poslední nerovnost využívá druhý dodatečný požadavek na volbu n).

$$\begin{aligned} P_i &\leq \mathbb{P}\left(\left(S_i, \Gamma^n\left(S_i\right)\right) \notin \overline{\mathcal{M}^n_\delta}(S, \Gamma(S))\right) + \sum_{j \neq i} \mathbb{P}\left(\left(S_j, \Gamma^n\left(S_i\right)\right) \in \overline{\mathcal{M}^n_\delta}(S, \Gamma(S))\right) \\ &< \delta + (m-1) \cdot 2^{-n\left(\mathcal{I}(S:\Gamma(S)) - 3\delta\right)} = \delta + (m-1) \cdot 2^{-n(C(\Gamma) - 3\delta)} \\ &\leq \delta + 2^{n(C(\Gamma) - 4\delta)} \cdot 2^{-n(C(\Gamma) - 3\delta)} = \delta + 2^{-n\delta} < 2\delta . \end{aligned}$$

Všimněme si, že výše zmíněným způsobem kombinujeme dva náhodné jevy: volbu zprávy a (předchozí) volbu kódu. Vzhledem k nezávislosti obou událostí můžeme jejich pořadí v úvaze zaměnit. Nejprve zvolíme zprávu, zakódujeme ji a přeneseme, přičemž sledujeme pravděpodobnost, že získaná dvojice nebude typická (první sčítanec). Potom volíme kódová slova pro ostatních $(m-1)$ zpráv, přenášíme je a počítáme pravděpodobnost, že se dostaneme do kolize s přenesenou dvojicí zvolené zprávy (suma tvořící druhý sčítanec). Jádrem odhadu je Tvrzení 8.17 použité pro $P = (S, \Gamma(S))$. Pro první sčítanec jsme použili bod (1) tohoto tvrzení. Pro druhý sčítanec jsme použili bod (3) s využitím předpokladu, že S_i a $\Gamma\left(S_j\right)$ jsou pro $i \neq j$ nezávislé. Tento předpoklad plyne jednak z nezávislosti volby $S_{i,j}$, jednak z předpokladu, že kanál je bezpaměťový, viz poslední část Lemmatu 8.6.

Dostali jsme odhad chyby pro konkrétní zvolenou zprávu přes všechny možné kódy. Odhad ovšem platí i pro průměrnou chybu P_e přes všechny zprávy:

$$P_e = \sum_{i \leq m} p_i \cdot P_i < 2\delta,$$

kde $p_i = 1/m$ je pravděpodobnost volby i-té zprávy. To je tedy odhad očekávané hodnoty (přes všechny možné kódy) průměrné chyby (daného kódu). Zjistili jsme tedy, že takto dvojitě průměrná chyba je menší než 2δ. To ale znamená, že průměrná chyba $\mathcal{E}(f)$ musí být takto malá i pro nějakou hodnotu náhodné veličiny S, tedy pro nějaký pevný kód K_n'. Právě provedená úvaha je jádrem toho, co se nazývá pravděpodobnostním argumentem. Ve skutečnosti to znamená, že takových vhodných kódů je hodně. Na druhou stranu je argument zcela nekonstruktivní, nedává žádný návod, jak konkrétní vhodný kód najít.

„Našli“ jsme kód s dobrou průměrnou chybou. Věta ovšem požaduje, aby chyba byla malá pro všechna kódová slova. Z kódu proto odstraníme slova s nejhorší chybou. Konkrétně vybereme jen ty zprávy, jejichž pravděpodobnost chyby nepřesahuje $2 \cdot \mathcal{E}(f)$. Podle Markovovy nerovnosti je takových slov nejvýše $m/2$, jinak řečeno, nemůže být víc než polovina slov s více než dvojnásobnou chybou než je průměr. Tak dostaneme kýžený kód $K_n : \{1, \dots, p\} \to A^n$, $p \geq m/2$. Všimněme si, že jsme zejména odstranili všechna slova, která se v kódu opakovala, protože pro ně je pravděpodobnost chyby jedna. Vzniklý kód už tedy můžeme chápat jako množinu. Je snadné uvážit, že pravděpodobnost chyby slov z K_n se při stejném dekódovacím postupu odstraněním některých slov z K_n' nezvýšila (naopak se snížila).

Pro (nový) odhad $f : B^n \to K_n$, a rovnoměrné rozložení $S^{(n)}$ na K_n tedy máme požadované

$$\mathcal{E}_{\left(S^{(n)},\Gamma\left(S^{(n)}\right)\right)} < \qquad\qquad 4\delta < \varepsilon\,.$$

Vzhledem k tomu, že $S^{(n)}$ je uniformní rozdělení na množině velikosti alespoň $m/2$, dostáváme i požadovanou rychlost přenosu následujícím výpočtem (ve kterém použijeme i předpoklad $n > 1/\delta$):

$$\frac{\mathcal{H}\left(S^{(n)}\right)}{n} \geq \frac{\log m - 1}{n} > \qquad C(\Gamma) - 4\delta - \frac{1}{n} > C(\Gamma) - 5\delta = C(\Gamma) - \varepsilon.$$

□

9 MAP a ML dekódování

V předchozím oddílu jsme ukázali, že pro daný kanál Γ, je možné posílat zprávy z množiny kódových slov $K_n \subseteq A^n$ s malou chybou při dekódování. V dekódování bylo definováno pomocí typických množin. Pro potřeby důkazu to byl nejvhodnější postup, ovšem zastřel fakt, že pokud již máme vybranou množinu kódových slov K_n, a tím i pravděpodobnostní rozložení zdroje (uvažujeme rovnoměrné rozdělení na vybrané množině), pak získáme nejlepší dekódování (s minimalní možnou chybou) pomocí tzv. MAP-dekódování, z anglického *Maximum Aposteriori Probability* („největší aposteriorní pravděpodobnost“, či snad „největší pravděpodobnost podle dostupných výsledků“).

Tato metoda funguje pro obecný kanál a zdroj, nikoliv jen pro situaci popsanou v předchozím odstavci. Uvažujeme tedy obecný kanál Γ a obecný zdroj S. Předpokládejme, že jsme při přenosu kódové zprávy kanálem obdrželi výstup b. Na základě tohoto výstupu chceme určit, jaká kódová zpráva a byla vyslána. Protože hodnota b je závislá jak na kódové zprávě, tak na šumu kanálu, nemůžeme a určit s jistotou. Zajímá nás ale, jaká kódová zpráva byla na základě dostupné informace vyslána s největší pravděpodobností. Výstup b tedy opravíme na předpokládanou kódovou zprávu $\widetilde{a}$, která je definována jako

$$f_{\mathrm{map}}(b) = \widetilde{a} := \operatorname*{argmax}_{a \in A} \mathbb{P}\left(S = a \mid R = b\right).$$

Takové dekódování nemusí být určeno jednoznačně. Pokud je maximum nabýváno pro více možných $a \in A$, vybereme libovolně jedno z nich. Dekódování minimalizuje celkovou chybu přenosu. To je vidět z následujícího výpočtu chyby pro obecné dekódování f:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S \neq f(R)\right) &= \sum_{b \in s\left(P_R\right)} \mathbb{P}\left(S \neq f(R) | R = b\right) \mathbb{P}\left(R = b\right) = \sum_{b \in s\left(P_R\right)} \mathbb{P}\left(S \neq f_{\mathrm{map}}(b)\right) P_R(b) \\ &= \sum_{b \in s\left(P_R\right)} \left(1 - \mathbb{P}\left(S = f(r) | R = b\right) \mathbb{P}\left(R = b\right).\right.\end{aligned}$$

Abychom minimalizovali chybu pomocí volby $f : B \to A$, je třeba maximalizovat aposteriorní pravděpodobnost $\mathbb{P}\left(S = f(r) | R = b\right)$, tedy použít dekódování f_{map}. Takový přístup zároveň minimalizuje chybu pro dekódování každé konkrétní přijaté zprávy $b \in B$. (Pozor, není pravda, že by minimalizoval chybu dekódování každé vyslané zprávy $a \in A$).

Uveďme ještě jeden důležitý vzorec pro MAP-dekódování, který ukazuje, že jde současně o maximalizaci sdružené pravděpodobnosti. Jelikož je $\mathbb{P}\left(R = r\right)$ nezáporné, platí

$$f_{\mathrm{map}}(b) = \operatorname*{argmax}_{a \in A}(\mathbb{P}\left(S = a \mid R = b\right) \mathbb{P}\left(R = b\right)) = \operatorname*{argmax}_{a \in A} \mathbb{P}\left(S = a, R = b\right).$$

Z definice se zdá že pro určení f_{map} potřebujeme znát matici podmíněných pravděpodobností $\mathbb{P}(S = a \mid R = b)$. Předchozí vzorec ale ukazuje, že stačí sdružené pravděpodobnosti $\mathbb{P}(S = a, R = b)$, které se z rozložení zdroje P_S a z matice Γ dají získat rychleji.

Podívejme se nyní na dva příklady, kde je matice kanálu stejná, ale mění se zdroj.

Příklad 1: Pro binární symetrický kanál s chybovostí 0.1, uvažujme zdroj S, kde pravděpodobnost vyslání 0 je 0.99 a 1 je vysílána s pravděpodobností (frekvencí) 0.01. Jde tedy o velmi asymetrický zdroj, kde 1 reprezentuje nějakou velmi vzácnou událost (například hlášení o nějaké poruše, či katastrofě). Matice pravděpodobností vypadají následovně:

$$P_{R|S} = \Gamma : \begin{array}{c|cc} R\backslash S & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 0.9 \end{array}, \quad P_{R,S} : \begin{array}{c|cc} R\backslash S & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.891 & 0.099 \\ 1 & 0.001 & 0.009 \end{array}, \quad P_{S|R} = \Gamma : \begin{array}{c|cc} R\backslash S & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{891}{892} & \frac{10}{11} \\ 1 & \frac{1}{892} & \frac{1}{11} \end{array}.$$

MAP-dekódování lze vyčíst z druhé a třetí matice. V obou případech pro dané $b \in B$ hledáme maximum v daném sloupci. Tomu odpovídající řádek je pak naším dekódováním. Například při přijetí zprávy 1 je pravděpodobnost $0.01 \cdot 0.9 = 0.009$, že bylo zamýšlenou zprávou skutečně 1 (a nedošlo k chybě), a pravděpodobnost $0.99 \cdot 0.1 = 0.099$, že byla vyslána nula (jako obvykle) a k chybě došlo. Je tedy jedenáctkrát pravděpodobnější, že zpráva je 0. Dekódovací funkce vypadá takto

$$f_{\text{map}}(i) = 0, \qquad i = 0, 1.$$

V tomto případě je převaha vysílané zprávy 0 tak veliká, že se projeví i v dekódování a to naprostou absencí ambice detekovat, kdy byla vyslána zpráva 1. Přenos signálu se v takovém momentu stane bezcenným. Zajímavější dekódování by se objevilo až pro n-násobné použití kanálu pro velká n.

Příklad 2: Pro binární symetrický kanál s chybovostí 0.1, uvažujme zdroj S s rovnoměrným rozdělením. Matice pravděpodobností vypadají následovně:

$$P_{R|S} = \Gamma : \begin{array}{c|cc} R\backslash S & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 0.9 \end{array}, \quad P_{R,S} : \begin{array}{c|cc} R\backslash S & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.45 & 0.05 \\ 1 & 0.05 & 0.45 \end{array}, \quad P_{S|R} = \Gamma : \begin{array}{c|cc} R\backslash S & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 0.9 \end{array}.$$

Zde vychází dekódovací funkce takto

$$f_{\text{map}}(i) = i, \qquad i = 0, 1.$$

Vidíme, že při jiném zdroji, se dekódování liší.

Příklady ukazují, že f_{map} silně závisí na zdroji a nelze ho vyčíst pouze z matice Γ, která obsahuje opačně podmíněné pravděpodobnosti, než které maximalizujeme.

Pokud ovšem máme rovnoměrně rozdělený zdroj, pak se lze opřít přímo o matici Γ. Pro rovnoměrný zdroj platí

$$f_{\text{map}}(b) = \operatorname*{argmax}_{a \in A} \mathbb{P}(S = a, R = b) = \operatorname*{argmax}_{a \in A} \mathbb{P}(R = b \mid S = a)\, \mathbb{P}(S = a)$$
$$= \operatorname*{argmax}_{a \in A} \mathbb{P}(R = b \mid S = a) = \operatorname*{argmax}_{a \in A} \Gamma_{a,b}.$$

kde předposlední rovnost plyne z konstantnosti $\mathbb{P}(S = a)$.

Obecná metoda, která maximalizuje $\mathbb{P}(R = b \mid S = a)$ se nazývá ML-dekódování z anglického *Maximum Likelihood* („největší (pravdě)podobnost“). Dekódovací funkce je v tomto případě

$$f_{\text{ml}}(b) := \operatorname*{argmax}_{a \in A} \mathbb{P}(R = b \mid S = a).$$

Pro tuto metodu je důležité, které z kódových slov je výstupu „nejpodobnější“, či přesněji, pro kterou kódovou zprávu je nejpravděpodobnější, že se změní na daný výstup. Z předchozího výpočtu je pak vidět, že se v obecném případě tyto metody liší, ale v případě rovnoměrně rozděleného zdroje tyto metody splývají.

V úvodu jsme zmínili potřebu dekódovat ideální kód (zdroj) pro obecný kanál, který získáme díky Shannonově větě. Takový kód může být volen tak, že je rovnoměrný na nějaké podmnožině $K_n \subseteq A^n$. V tomto případě tedy můžeme dekódovat oběma způsoby, metodou MAP i metodou ML a získáme stejnou dekódovací funkci. Jen je třeba, při hledání maxima, omezit se pouze na řádky, které odpovídají zprávám z K_n.

10 Použití kanálu pro konkrétní zdroj

V předchozích kapitolách, týkajících se kapacity kanálu, jsme dokázali, že žádný zdroj o entropii vyšší, než je kapacita kanálu, se nedá přenášet „bez chyby“, lépe řečeno s chybou, kterou lze v limitě zmenšit na nulu. Pozitivní část teorie ukázala možnosti přenosu ve smyslu maxima přes všechny možné zdroje. Pro každé n jsme našli dostatečně bohatý (entropie blízká kapacitě kanálu) rovnoměrný zdroj na množině slov délky n, který lze přenést s malou chybou. V tomto smyslu jsme tedy byli schopni dosáhnout kapacity kanálu.

Ovšem toto dosažení kapacity nijak neříká, jak máme kanálem posílat konkrétní zdroj s konkrétním rozdělením, abychom byli schopni takový přenos dobře dekódovat. Zdrojem myslíme posloupnost náhodných veličin $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s hodnotami v abecedě A', která může a často je odlišná od vstupní abecedy kanálu Γ, kterým chceme přenášet. Jednoduchý příklad může být přenos předem neznámého textu v anglickém či jiném jazyce skrze „digitální“ kanál. Abeceda A' je tedy klasickou abecedou daného jazyka, vstupní i výstupní abeceda kanálu je dvouprvková množina $\{0, 1\}$.

Přenos daného zdroje se pak skládá ze tří částí:

1. „předzpracování“ zdroje, t.j. zobrazení $g : (A')^n \to A^+$,
2. přenos kanálem Γ, konkrétně jeho příslušnou mocninou,
3. dekódování přijaté zprávy $f_n : B^+ \to (A')^n$.

Pro jednoduchost předpokládáme, že je předem známa délka vyslané zprávy, a je tedy známo, jakou dekódovací funkci f_n použít.

Obrazům $g(u)$, $u \in (A')^+$, budeme říkat *kódová slova*. Otázkou bude, jak dlouhá musí být, aby byl přenos takřka bezchybný. Delší slova umožňují určitou vnitřní autokontrolu, pro jednoduchost si můžeme představovat kontrolní bity. Tím snižujeme chybovost. Na druhou stranu je takový přenos přirozeně časově či datově náročnější. Rádi bychom ukázali, jak tuto náročnost maximálně snížit. Cílit budeme na asymptotické výsledky.

Zaveďme nezbytné pojmy. Ve zbývající textu této části skript budeme uvažovat zdroj $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s hodnotami v abecedě A' a použití bezpaměťového kanálu Γ se vstupní abecedou A a výstupní B.

Pro kódovací funkci $g : (A')^+ \to A^+$ a dekódovací funkce $f_n : B^+ \to (A')^+$ definujeme chybu dekódování $\mathcal{E}_{f_n,g}(n)$ předpisem

$$\mathcal{E}_{f_n,g}(n) = \mathbb{P}\left(f_n(\Gamma(g(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}))) \neq X_0, X_2, \dots, X_{n-1}\right).$$

Abychom mohli použít předchozí výsledky, budeme předpokládat, že při předzpracování zdroje zobrazujeme slova stejné délky na slova stejné délky. Neboli slova délky n zobrazíme na slova délky m_n. Ukážeme, že pokud chceme udržet malou

chybu přenosu a zároveň být efektivní, měl by poměr mezi m_n a n být blízko podílu $\mathcal{H}(X)/C(\Gamma)$. Tento podíl lze nejlépe pochopit v termínech *rychlosti přenosu*. V reálném světě by jednotkou rychlosti přenosu byl bit/s (počet bitů za sekundu). V případě digitálního kanálu ovšem čas nebereme v úvahu a přirozenou jednotkou je počet bitů na jeden symbol, tedy na jednu instanci (či „použití“) zdroje či kanálu. Entropie $\mathcal{H}(X)$ vyjadřuje průměrný počet bitů obsažený v jednom takovém použití. Kanál tedy musí přenášet právě $\mathcal{H}(X)$ bitů na jedno použití zdroje. Současně vyjadřuje kapacita $C(\Gamma)$ počet bitů, které je možno spolehlivě přenést jedním použitím kanálu. Na jedno použití zdroje tedy skutečně potřeba zhruba $\mathcal{H}(X)/C(\Gamma)$ použití kanálu.

Tuto úvahu můžeme s pomocí vlastnosti AEP přeložit do počtu slov. Zdroj X vygeneruje přibližně $2^{\mathcal{H}(X)n}$ přibližně uniformně rozdělených slov délky n, přičemž zbylá slova můžeme v rámci epsilonové tolerance ignorovat (jejich souhrnná pravděpodobnost – nikoli jejich počet! – je menší než ε). Pro m-tou mocninu kanálu zase ze Shannonovy věty o propustnosti existuje množina kódových slov o velikosti zhruba $2^{C(\Gamma)m}$ s jejichž pomocí dosáhneme tolerovanou chybu. Rovnost

$$m_n = n \cdot \frac{\mathcal{H}(X)}{C(\Gamma)},$$

tedy znamená, že máme stejný počet slov, které potřebujeme zakódovat, a slov, která můžeme poslat kanálem. Pak stačí obě množiny, typická slova vygenerovaná zdrojem „namapovat“ vzájemně jednoznačně na množinu slov vhodnou pro přenos kanálem. Takto bude definované zobrazení g. Dekódování pak bude sestávat z odhadu poslaného slova, na něž pak aplikujeme g^{-1}. To je hlavní myšlenka následující věty. Jak je vidět, klíčovou roli zde opět hraje vlastnost AEP. Připomeňme, že AEP jsme v kapitole 4 zformulovali pro i.i.d. procesy a některé markovské procesy, a nezabývali jsme se podrobněji obecnějším kritériem pro to, aby pro daný proces taková věta platila. Poznamenejme zde jen, že taková věta platí pro řadu „rozumných“ procesů (např. pro tzv. *ergodické stacionární* procesy – tento výsledek se nazývá Shannonova-McMillanova-Breimanova věta). V následující větě budeme prostě předpokládat, že zdroj vlastnost AEP má. Celý výsledek je rozdělen do dvou tvrzení. První obsahuje jádro důkazu, druhé je reformulace do výsledného asymptotického tvaru pomocí standardního nástroje, tzv. diagonálního argumentu.

Tvrzení 10.1. *Nechť X je zdroj s entropií $\mathcal{H}(X) = h$ splňující AEP a nechť Γ je bezpaměťový kanál s nenulovou kapacitou. Buď dále $\varepsilon > 0$, m_n posloupnost přirozených čísel, která splňuje podmínku*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} > \frac{h}{C(\Gamma)} + \varepsilon.$$

Potom existuje kódování zdroje $g : (A')^+ \to A^+$, které zobrazuje slova délky n na slova délky m_n a soubor dekódovacích funkcí $f_n : B^{m_n} \to (A')^n$, $n \in \mathbb{N}$, takových, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(f_n(\Gamma^{m_n}(g(X_{[0,n-1)})) \neq X_{[0,n-1)}\right) = 0.$$

Důkaz. Buď vše dle předpokladů tvrzení. Volme $\varepsilon' < \varepsilon/2$ takové, že

$$\frac{h+\varepsilon'}{C(\Gamma)-\varepsilon'} < \frac{h}{C(\Gamma)} + \varepsilon'.$$

Vlastnost AEP říká, že existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$, má typická množina slov

$$T_n = \left\{u \in (A')^n \mid \mathbb{P}\left(X_{[0,n-1)} = u\right) \in \left(2^{-n(h+\varepsilon')}, 2^{-n(h-\varepsilon')}\right)\right\}$$

pravděpodobnost vyšší než $1-\varepsilon'$.

Z věty o propustnosti kanálu plyne, že existuje n_0' takové, že pro každé $n \geq n_0'$, existuje množina $K_n \subseteq A^{m_n}$ mohutnosti alespoň $2^{m_n(C(\Gamma)-\varepsilon')}$ a dekódovací funkce $f_n' : B^{m_n} \to A^{m_n}$ taková, že pro všechna $v \in K_n$,

$$\mathbb{P}\left(f_n'(\Gamma^{m_n}(v)) \neq v\right) < \varepsilon'.$$

Buď nyní $n_0'' \geq \max(n_0, n_0')$ takové, že pro všechna $n \geq n_0''$ platí $m_n > n_0'$ a také

$$\frac{m_n}{n} > \frac{h}{C(\Gamma)} + \varepsilon' > \frac{h+\varepsilon'}{C(\Gamma)-\varepsilon'}.$$

Mohutnost množiny T_n je menší nebo rovna $2^{n(h+\varepsilon')}$ a z předchozí nerovnosti plyne, že pro každé $n \geq n_0''$ je tato mohutnost menší než mohutnost množiny K_n. V takové situaci fixujme nějakou bijekci g_n z T_n do podmnožiny $K_n' \subseteq K_n$. Zobrazení g potom definujeme jako takové zobrazení z $(A')^+$ do A^+, které zobrazuje slova délky n na slova délky m_n a $g(u) = g_n(u)$ pro všechna $n \geq n_0''$, $u \in T_n$. Dekódovací funkce f_n pak je definovaná takto:

$$f_n(v) = u, \text{ pokud } u \in T_n \wedge g(u) = f_n'(v),$$

jinak dekódujeme libovolně (takové dekódování nekontrolujeme a spadne do chyby). Chyba dekódování tedy nastává, pokud proces X vygeneruje netypickou zprávu nebo pokud selže přenos nějakého slova z K_n. Současně předpokládáme, že proces přenosu je nezávislý na procesu výběru zprávy. Platí tedy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(f(\Gamma^{m_n}(g(X_{[0..n)}))) = X_{[0..n)}\right) = \mathbb{P}\left(X_{[0..n)} \in T_n \wedge f_n'(\Gamma^{m_n}(g(X_{[0..n)}))) = g(X_{[0..n)})\right) = \\
&= \sum_{u \in T_n} \mathbb{P}\left(f_n'(\Gamma^{m_n}(g(X_{[0..n)}))) = g(X_{[0..n)}) \mid X_{[0..n)} = u\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) \\
&\geq \sum_{u \in T_n} \left(1-\varepsilon'\right) \mathbb{P}\left(X_{[0..n)} = u\right) = (1-\varepsilon')^2 \geq 1 - 2\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Neboli chyba přenosu je menší než ε. □

Tvrzení 10.2. *Pro zdroj X s entropií h, který splňuje AEP, a bezpaměťový kanál Γ s nenulovou kapacitou, existuje kódování zdroje $g : (A')^+ \to A^+$, které zobrazuje slova délky n na slova délky m_n a dekódovací funkce $f_n : B^{m_n} \to (A')^n$ takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(f_n(\Gamma^{m_n}(g(X_{[0,n-1)}))) \neq X_{[0,n-1)}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \frac{h}{C(\Gamma)}.$$

Důkaz. Tvrzení dostaneme z předchozího diagonálním argumentem. Zvolme si nějakou klesající posloupnost ε_k jdoucí k nule. Zároveň položme

$$m_{n,k} = \left\lceil n \left(\frac{h}{C(\Gamma)} + 2\varepsilon_k \right) \right\rceil .$$

Pro pevné k splňuje posloupnost $(m_{n,k})_n$ předpoklad předchozího tvrzení, a existuje tedy kódovací funkce $g_k : (A')^+ \to A^+$ a soubor dekódovacích funkcí $f_{n,k} : B^{m_{n,k}} \to (A')^n$, $n \in \mathbb{N}$, takový, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(f_{n,k}(\Gamma^{m_{n,k}}(g_k(X_{[0,n-1)}))) \neq X_{[0,n-1)} \right) = 0.$$

Lze tedy najít n_k takové, že pro všechna $n \geq n_k$ platí

$$\mathbb{P}\left(f_{n,k}(\Gamma^{m_{n,k}}(g_k(X_{[0..n)}))) \neq X_{[0..n)} \right) < \varepsilon_k, \qquad \left| \frac{m_{n,k}}{n} - \frac{h}{C(\Gamma)} \right| < 3\varepsilon_k.$$

Zároveň lze volit n_k tak, aby tvořily rostoucí posloupnost, jdoucí k nekonečnu. Nakonec definujeme

$$m_n = m_{n,k},\ g(u) = g_k(u),\ f_n(v) = f_{n,k}(v),$$

pro $n_k \leq n \leq n_{k+1}$, $u \in (A')^n$, $v \in B^{m_n}$. Pro $n < n_0$ definujeme vše libovolně, na asymptotické chování to nemá vliv. Pro $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ zároveň platí

$$\mathbb{P}\left(f_n(\Gamma^{m_n}(g(X_{[0..n)}))) \neq X_{[0..n)} \right) < \varepsilon_k, \qquad \left| \frac{m_n}{n} - \frac{h}{C(\Gamma)} \right| < \varepsilon_k.$$

Pokud nyní jde n do nekonečna, jde také k do nekonečna a dostáváme požadované limity. □