

## Zkoušky z NMMA101, zimní semestr 2023/2024

### Obecné podmínky

Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu. Pokud student nezískal zápočet před konáním zkoušky, může jej dostat i za úspěšné napsání písemné části, pokud bude ohodnocena alespoň 30 body.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Pokud student třikrát neuspěl u písemné části, může jít stejně k ústní zkoušce a počítá se mu nejlepší výsledek písemky. V tom případě musí z ústní zkoušky získat více bodů, aby byl celkový součet písemné a ústní části alespoň 50 bodů.

### Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá ze čtyřech příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

- 1) Výpočet limity posloupnosti (10 bodů)
- 2) Výpočet limity funkce (často s použitím Taylorova polynomu) (10 bodů)
- 3) Průběh funkce (20 bodů)
- 4) Teoretický příklad (10 bodů)

Písemná část trvá 120 minut. Student může používat donesenou literaturu (učebnice, poznámky, zápisky ze cvičení), nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže dokladem totožnosti.

Student uspěje u písemné části, pokud je jeho celkový výsledek alespoň 25 bodů.

### Vzor zadání písemky

- 1) (10 bodů) Spočtete následující limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n}} - \sqrt[3]{n^3 - 1}) \sqrt{3n^3 + 1}.$$

- 2) (10 bodů) Určete koeficienty  $a, b \in \mathbf{R}$  tak, aby limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax + x \arctan bx - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty  $a, b$  limitu vypočtete.

- 3) (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

- 4) (10 bodů) Nechť  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je zadaná funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků (tedy ho dokažte, nebo ukažte protipříklad):

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow$  existuje  $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 1$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 1 \Rightarrow$  existuje  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} f^3(x) = 1 \Rightarrow$  existuje  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

### Ústní část zkoušky

Během zkouškového období bude vypsáno minimálně 5 termínů pro ústní zkoušku a právě jeden termín bude vypsán v září. Student si na zkoušce vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.

*Skladba otázek a počty bodů :*

- 1) Klíčový pojem (neboduje se)
- 2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 4 body)
- 3) Lehká věta a důkaz (4 body za znění a 8 bodů za důkaz)
- 4) Těžká věta a důkaz (4 body za znění a 12 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a těžkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic respektive vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat. Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu a získání alespoň 25 bodů z této části ústní části.

Pokud je součet bodů za písemnou a ústní část alespoň 60 bodů, dostane student ještě doplňkovou otázku na implikace za maximálně 10 bodů.

### Vzor zadání otázek

Ústní zkouška:

- 1) Spojitost funkce v bodě zleva (0 bodů)
- 2) Limita posloupnosti, supremum množiny, věta o aritmetice pro limity posloupností (12 bodů)
- 3) Lagrangeova věta (12 bodů)
- 4) derivace složené funkce (16 bodů)

Implikace:

I) Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Příslušná tvrzení dokažte, nebo uveďte protipříklad.

- (1) Posloupnost  $\{a_n\}$  je monotónní.
- (2) Posloupnost  $\{a_n^2\}$  je monotónní.
- (3) Posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu.

### Celkové hodnocení zkoušky

- 1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
- 2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 25 bodů z písemné zkoušky, alespoň 25 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
- 3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 85 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.
- 4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 70 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.

## Seznam klíčových pojmů

- supremum, infimum
- limita posloupnosti (vlastní i nevlastní)
- okolí včetně nevlastních bodů, jednostranná a prstencová okolí
- limita funkce včetně jednostranných ve vlastním i nevlastním bodě
- spojitost funkce v bodě (i jednostranná)
- derivace funkce v bodě (i jednostranná)
- funkce konvexní a konkávní

## Definice

- zdola omezená, shora omezená nebo omezená množina
- spočetná a nespočetná množina
- posloupnost reálných čísel
- zdola omezená, shora omezená nebo omezená posloupnost
- neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající posloupnost
- vybraná posloupnost
- rozšířená reálná osa
- limes superior, limes inferior
- funkce jedné reálné proměnné
- neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající funkce
- sudá, lichá, periodická funkce
- spojitost funkce na intervalu
- extrémny funkce (všechny typy)
- prostá funkce, inverzní funkce
- obecná mocnina  $a^b$
- $n$ -tá derivace funkce v bodě
- tečna funkce v bodě
- inflexní bod
- asymptota funkce
- Taylorovým polynomem řádu  $n$  funkce  $f$  v bodě  $a$
- funkce  $f$  je v bodě  $a$  malé  $o$  od  $g$

## Lehké věty

- o existenci infima
- Archimédova vlastnost
- hustota  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$
- jednoznačnost vlastní limity posloupnosti
- o omezenosti konvergentní posloupnosti
- o limitě vybrané posloupnosti
- limita a uspořádání pro posloupnosti
- o dvou strážnících
- limita typu  $A/0$  (jen znění)
- o limitě monotónní posloupnosti
- Cantorův princip vložených intervalů
- o jednoznačnosti limity funkce
- limita funkce a omezenost
- aritmetika limit pro funkce
- limita funkce a uspořádání (jen znění)
- limita monotónní funkce
- spojitost sinu a cosinu
- vztah derivace a spojitosti
- derivace inverzní funkce (jen znění)

- Fermatova věta
- Rolleova věta
- Lagrangeova věta o střední hodnotě
- o vztahu derivace a monotonie
- derivace a limita derivace
- vztah druhé derivace a konvexity
- konvexita a spojitost
- tvar asymptoty

### **Těžké věty**

- aritmetika limit pro posloupnosti
- Bolzano-Weierstrass
- vztah limity, limes-inferior a limes-superior
- o hromadných hodnotách posloupnosti (jen znění)
- Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnost
- Heineho věta
- limita složené funkce
- Bolzano-Cauchyova podmínka pro funkce
- Darbouxova věta
- spojitost funkce a nabývání extrémů
- o inverzní funkci
- zavedení exponenciely (jen znění)
- vlastnosti logaritmu
- aritmetika derivací
- derivace složené funkce
- Cauchyova věta o střední hodnotě
- l'Hospitalovo pravidlo (jen znění)
- konvexita a jednostranné derivace
- nutná podmínka pro inflexi
- postačující podmínka pro inflexi
- o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem
- Taylor