Zkoušková písemka z NMAA104 - 9.6.2025

Na každý papír napište: 1. Číslo příkladu 2. Jméno

1.(12 bodů) Vyšetřete konvergenci, stejnoměrnou konvergenci a lokálně stejnoměrnou konvergenci na maximálních možných intervalech pro posloupnost

$$f_n(x) = \arctan(x^n - x^{n+2})$$

2.(16 bodů) Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{-\sqrt{n}|x|}.$$

a) Pro jaká $x \in \mathbf{R}$ tato řada konverguje?
b) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.
c) Je F diferencovatelná na $(0, \infty)$?
d) Je F diferencovatelná na svém definičním oboru?

3.(12 bodů) Rozviňte funkci

$$f(x) = 2x + |x|$$

do Fourierovy řady na intervalu $(-\pi, \pi)$. Konverguje tato řada k f bodově, nebo dokonce stejnoměrně? Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4.(10 bodů) Nechť $f : [0, 1] \to [0, \infty)$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

$$\text{a) } f \in BV([0,1]) \Rightarrow \sqrt{f} \in BV([0,1]).$$

$$\text{b) } \sqrt{f} \in BV([0,1]) \Rightarrow f \in BV([0,1]).$$

Přeji Vám mnoho štěstí.