

Zkoušková písemka z NMAA104 - 26.5.2025

Na každý papír napište: 1. Číslo příkladu 2. Jméno

1.(12 bodů) Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{-1}{4}\right)^n.$$

2.(16 bodů) Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \arctan^n x.$$

- a) Pro jaká $x \in \mathbf{R}$ tato řada konverguje?
- b) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.
- c) Je F diferencovatelná na svém definičním oboru?

3.(12 bodů) Rozviňte funkci

$$f(x) = e^{3x}.$$

do cosinové Fourierovy řady na intervalu $(0, \pi)$. Konverguje tato řada k f bodově, nebo dokonce stejnoměrně?

4.(10 bodů) Nechť $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Připomeň, že $f \in Lip_K([0, 1])$, pokud

$$\forall x, y \in [0, 1] \text{ platí } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

- a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ a $f_n \in C^1([0, 1]) \Rightarrow f \in C^1([0, 1])$.
- b) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, $K > 0$ a $f_n \in Lip_K([0, 1]) \Rightarrow f \in Lip_K([0, 1])$.
- c) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ a $f_n \in AC([0, 1]) \Rightarrow f \in AC([0, 1])$.

Přeji Vám mnoho štěstí.

Zkoušková písemka z NMAA104 - 26.5.2025

Na každý papír napište: 1. Číslo příkladu 2. Jméno

1.(12 bodů) Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{-1}{4}\right)^n.$$

2.(16 bodů) Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \arctan^n x.$$

- a) Pro jaká $x \in \mathbf{R}$ tato řada konverguje?
- b) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.
- c) Je F diferencovatelná na svém definičním oboru?

3.(12 bodů) Rozviňte funkci

$$f(x) = e^{3x}.$$

do cosinové Fourierovy řady na intervalu $(0, \pi)$. Konverguje tato řada k f bodově, nebo dokonce stejnoměrně?

4.(10 bodů) Nechť $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Připomeň, že $f \in Lip_K([0, 1])$, pokud

$$\forall x, y \in [0, 1] \text{ platí } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

- a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ a $f_n \in C^1([0, 1]) \Rightarrow f \in C^1([0, 1])$.
- b) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, $K > 0$ a $f_n \in Lip_K([0, 1]) \Rightarrow f \in Lip_K([0, 1])$.
- c) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ a $f_n \in AC([0, 1]) \Rightarrow f \in AC([0, 1])$.

Přeji Vám mnoho štěstí.