Je vhodné přidat nějaké teoretické přiklady například na AC, BV, nebo metrické prostory a na každém cvičení tak 1-2 teoretické příklady zadat!

1. cvičení

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

$$1.\ \frac{x^n}{1+x^n} \text{ na } [0,1], \quad 2.\ x^n - x^{2n} \text{ na } [0,1],$$

$$3.\ \sin\bigl(\frac{x}{n}\bigr) \text{ na } [-100,100] \text{ a na } \mathbf{R}\ , \quad 5.\ n\bigl(x^{\frac{1}{n}}-1\bigr) \text{ na } [1,100] \text{ a na } [1,\infty).$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje nestejnoměrně k 0 na $[0,1)$ a $\dfrac{1}{2}$ v 1; $\sigma_n = \dfrac{1}{2}$.

2. Konverguje nestejnoměrně k 0; Derivací zjistíme, že max $x^n - x^{2n}$ je v $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}$ a to $\sigma_n = \dfrac{1}{4}$.

3. Konverguje stejnoměrně k 0 na $[-100,100]$ a nestejnoměrně na $\mathbf{R}$;

Pro $n \ge 100$ je $\sin\dfrac{x}{n}$ monotónní na $[-100,100]$ a tedy $\sigma_n = \sin\dfrac{100}{n} \to 0$. Na $\mathbf{R}$ je zjevně $\sigma_n = 1$.

5. Konverguje stejnoměrně k $\log x$ na $[1,100]$ a nestejnoměrně na $[1,\infty)$;

$$n\bigl(x^{\frac{1}{n}}-1\bigr) = \frac{e^{\frac{1}{n}\log x}-1}{\frac{1}{n}\log x}\log x \to \log x. \text{ Na } [1,\infty) \text{ je } \lim_{x\to\infty} n\bigl(x^{\frac{1}{n}}-1\bigr)-\log x = \infty = \sigma_n.$$

Na $[1,100]$ je potřeba provést rozumný odhad :–).

4. Nechť $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) $f_n \to 0$ na $[0,1]$ a f_n jsou spojité na $[0,1] \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.

b) $f_n \to 0$ na $[0,1]$ a f_n jsou rostoucí na $[0,1] \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.

5. Nechť $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) $f_n \to 0$ lokálně stejnoměrně na $(0,1) \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$.

b) $f_n \to 0$ lokálně stejnoměrně na $[0,1] \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.

2. cvičení

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

$$1.\ \sin\bigl(\pi x^n\bigr) \text{ na } [0,1], \quad 2.\ \frac{nx}{1+n+x} \text{ na } (0,\infty)$$

$$3.\ n\Bigl(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\Bigr) \text{ na } (0,\infty)\ , \quad 4.\ \sqrt[n]{1+x^n} \text{ na } [0,\infty), \quad 6.\ x\arctan(nx) \text{ na } \mathbf{R}$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $[0,1)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\sigma_n = f_n\bigl(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\bigr) = 1. \text{ Na } [0,1-\delta] \text{ je } \sigma_n \le \sup \pi x^n = \pi(1-\delta)^n \to 0.$$

2. Konverguje lokálně stejnoměrně k x na $(0,\infty)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\sigma_n \ge \lim_{x\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = \infty. \text{ Na } [0,K] \text{ odhadneme } \sigma_n = \sup\frac{x+x^2}{1+n+x} \le \frac{K+K^2}{1+n} \to 0.$$

3. Konverguje nestejnoměrně k $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; Standartně rozšiřujeme $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})}=\frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})^2}\overset{x\to 0+}{\to}\infty=\sigma_n.$$

4. Konverguje stejnoměrně k $\max\{1,x\}$; Na $[0,1]$, $|\sqrt[n]{1+x^n}-1|\leq\sqrt[n]{2}-1\to 0$.

Na $[1,\infty)$ použijeme $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+\ldots)$ a odhadneme

$$|\sqrt[n]{1+x^n}-x|=\frac{(\sqrt[n]{1+x^n})^n-x^n}{(\sqrt[n]{1+x^n})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x^n})^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}}\leq\frac{1}{n-2}\to 0.$$

6. Konverguje stejnoměrně k $\frac{\pi}{2}|x|$ na $\mathbf{R}$; Pomocí l'Hospitala $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan y}{\frac{1}{y}}=1$.

Na $[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]$ je $|x\arctan(nx)-\frac{\pi}{2}x|=|x(\arctan(nx)-\frac{\pi}{2})|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\pi\to 0$.

Na $[\frac{1}{\sqrt{n}},\infty]$ je nx velké . Tedy díky $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan y}{\frac{1}{y}}=1$

odhadneme $|x(\arctan(nx)-\frac{\pi}{2})|\leq x\frac{C}{nx}=\frac{C}{n}\to 0$.

5. Nechť $f_n,f:[0,1]\to\mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) $f_n\rightrightarrows f$ na $[0,1]$ a f je spojitá na $[0,1]\Rightarrow f_n^2\rightrightarrows f^2$ na $[0,1]$.

b) $f_n\rightrightarrows f$ na $[0,1]\Rightarrow f_n^2\rightrightarrows f^2$ na $[0,1]$.

3. cvičení

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

1. $e^{n(x-1)}$ na $(0,1)$, 2. nxe^{-nx^2} na $\mathbf{R}$,

3. $\frac{\log nx}{n}$ na $(0,\infty)$, 5. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ na $[0,\infty)$.

Výsledky a návody:

1. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $(0,1)$; Nekonverguje stejnoměrně:

Moore-Osgood u 1. Na $[0,1-\delta]$ buď Dini, nebo $\sigma_n=e^{-n\delta}\to 0$.

2. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $(0,\infty)$ a na $(-\infty,0)$;

Pomocí derivace zjistíme, že f_n-f roste na $(0,\frac{1}{\sqrt{2n}})$, klesá na $(\frac{1}{\sqrt{2n}},\infty)$

a maximum má v $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ a to $\sigma_n=\sqrt{n}e^{-1}$. Tedy nekonverguje stejnoměrně.

Na $[\delta,\infty)$, f_n-f klesá, pokud je n dost velké: $\frac{1}{\sqrt{2n}}<\delta$. Tedy $\sigma_n\leq n\delta e^{-n\delta^2}\to 0$.

3. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $(0,\infty)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$\sigma_n\geq\lim\limits_{x\to\infty}|f_n-f|=\infty$. Na $[\delta,K]$ odhadneme $\left|\frac{\log nx}{n}\right|\leq\max\left\{\left|\frac{\log n\delta}{n}\right|,\left|\frac{\log nK}{n}\right|\right\}\to 0$.

5. Konverguje lokálně stejnoměrně k e^x na $(0,\infty)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\lim_{x\to\infty}e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\infty,\text{ neboť } e^x \text{ roste u } \infty \text{ rychleji než polynom.}$$

Z Taylora víme, že existuje $C>0$ takové, že $|\frac{\log(1+y)}{y}-1|\leq Cy$ pro všechna $0<y<1$.

Na $[0,K)$ tedy pro $n>K$ odhadneme

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|=e^x\left|e^{(\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}-1)x}-1\right|\leq e^K(e^{C\frac{K}{n}K}-1)\to 0.$$

4. Nechť $f_n, f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \Rightarrow |f_n| \rightrightarrows |f|$ na $[0,1]$.

b) $|f_n| \rightrightarrows |f|$ na $[0,1] \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

c) $|f_n| \rightrightarrows |f|$ na $[0,1]$ a f je spojitá na $[0,1] \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

4. cvičení

U následujících řad funkcí zjistěte : a) Pro jaká x řada konverguje? b) Na jakém intervalu konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně? c) Na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},$$

$$3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\frac{2x}{x^2+n^3}\Big), \quad 5.\ \text{Na } (0,\infty) \text{ vyšetřete } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$ a tedy je tam i spojitá;

Podle nutné podmínky nekonverguje stejnoměrně na $(-1,1)$.

Na $[-1+\delta, 1-\delta]$ použijeme Weierstrasse: $|x^n| \le (1-\delta)^n$ a $\sum_n (1-\delta)^n < \infty$.

2. Konverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$ a tedy je tam i spojitá;

Derivováním zjistíme, že $|u_n(x)| \le u_n(\frac{2}{n}) = \dfrac{4}{n^2}e^{-2}$. Weierstrass a $\sum_n \dfrac{4}{n^2}e^{-2} < \infty$.

3. Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ a tedy je tam i spojitá;

Derivováním zjistíme, že $|u_n(x)| \le u_n(n^{3/2})$. Weierstrass a $\sum_n \arctan\Big(\dfrac{2n^{3/2}}{2n^3}\Big) < \infty$.

5. Konverguje lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$;

Na $[\delta,\infty)$ odhadneme $\Big|\dfrac{nx}{1+nx}\dfrac{1}{(1+x)\cdots(1+(n-1)x)}\Big| \le 1\dfrac{1}{(1+\delta)^{n-1}}$

a použijeme Weierstrasse $\sum_n \dfrac{1}{(1+\delta)^{n-1}} < \infty$. Nekonverguje stejnoměrně :

$$\log\big((1+x)\cdots(1+nx)\big) \le \log(1+x) + \ldots + \log(1+nx) \le x + \ldots + nx \le n^2 x,$$

a tedy $u_n(x) \ge \dfrac{nx}{\exp(n^2x)}$. Není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, neboť

$$\sum_{n=n_0}^{2n_0} u_n(\tfrac{1}{n_0^2}) \ge \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\frac{1}{n_0}}{\exp(4)} \ge \frac{1}{\exp(4)}.$$

4. Nechť $f_n, f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[0,1] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n^3 \rightrightarrows$ na $[0,1]$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3 \rightrightarrows$ na $[0,1] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[0,1]$.

5. cvičení

U následujících řad funkcí zjistěte : a) Pro jaká x řada konverguje? b) Na jakém intervalu konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně? c) Na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^2+1}, \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\log\Big(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\Big),$$

$$3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^s}\ \text{na } \mathbf{R},\ s\in\mathbf{R}, \quad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\arctan(nx)\ \text{na } [0,2\pi]$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ a tedy je tam i spojitá;

Konverguje na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Podle nutné podmínky nekonverguje stejnoměrně.

Na $\mathbf{R}\setminus(-\delta,\delta)$ použijeme Weierstrasse: $\left|\frac{1}{n^2x^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2\delta^2+1}$ a $\sum_n\frac{1}{n^2\delta^2+1}<\infty$.

2. Konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbf{R}$ a tedy je tam i spojitá;

Podle nutné podmínky nekonverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$.

Na $[-K,K]$ použijeme Weierstrasse: $|u_n(x)|\le\log\Big(1+\frac{K^2}{n\log^2 n}\Big)\le\frac{K^2}{n\log^2 n}$

a $\sum_n\frac{K^2}{n\log^2 n}$ konverguje podle kondenzačního kritéria.

3. Konverguje stejnoměrně pro $s>1$ a lokálně stejnoměrně pro $0<s\le1$ na $(0,2\pi)+k\pi$;

Pro $s>1$ Weierstrass s $a_n=\frac{1}{n^s}$. Pro $0<s\le1$ lze lokálně Dirichlet s $\varepsilon_n=\cos nx$.

Na celém $(0,2\pi)$ neplatí B-C, neboť $\sum_{n=n_0}^{2n_0}u_n\Big(\frac{1}{n_0}\Big)\ge\frac{1}{1000}$.

5. Konverguje lokálně stejnoměrně; Na $[0,2\pi]$ není splněna B-C:

$\sum_{n=n_0}^{2n_0}u_n\Big(\frac{1}{n_0}\Big)\ge\frac{1}{1000}$. Na $[\delta,2\pi-\delta]$ lze užít Abel s $\varepsilon_n=\arctan nx$

a $a_n(x)=\frac{\cos nx}{n}$ konverguje stejnoměrně z Dirichleta.

4. Nechť $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}$ jsou spojité a $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ konverguje na $[0,1]$ a je to spojitá funkce. Musí být $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\rightrightarrows$?

6. cvičení

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\ \text{na } (-1,\infty), \quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n\ \text{na } [0,1],$$

$$5.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\ \sin nx}{\sqrt{n+x}}\ \text{na } (0,\infty).$$

Rozhodněte, jestli jsou následující funkce diferencovatelné na $(-1,\infty)$*:*

$$2.\ F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}, \quad 4.\ G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}.$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje stejnoměrně; Dirichlet s $\varepsilon_n(x)=(-1)^n$.

3. Konverguje stejnoměrně; Dirichlet s $\varepsilon_n(x)=(-1)^n$.

Průběh funkce $(1-x)x^n$ dá stejnoměrnou konvergenci $a_n(x)$ k 0.

5. Konverguje stejnoměrně; Dirichlet s $\varepsilon_n(x) = \sin x \ \sin nx$.

Lze ukázat, že částečné součty $\varepsilon_n(x)$ jsou omezené - i u 0!!!

2. Je diferencovatelná na $(-1,\infty); F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje z Leibnitze.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)}{(n+x)^2} \text{ a na } [-1+\delta,\infty):\ |u_n(x)| \le \frac{1}{(n-1+\delta)^2}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1+\delta)^2} < \infty$ a díky Weierstrassovi existuje F' na $[-1+\delta,\infty)$, a tedy na $(-1,\infty)$.

4. Je diferencovatelná na $(-1,\infty)$; Zřejmě $G(x) = xF(x)$, a tedy to plyne z 6.

Jde i znovu ověřit předpoklady věty: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$

a tato řada konverguje stejnoměrně z Dirichleta s $\varepsilon_n(x) = (-1)^n$ na $(-1,K]$.

Z $\frac{\partial}{\partial n}\frac{n}{(n+x)^2}$ zjistíme, že monotonie v n platí pro $n \ge n_0 \ge K$!

7. cvičení

Písemka na celou hodinu

8. cvičení

Určete poloměr konvergence následujících řad:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}, \quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n!},$$

$$4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(na^n + \tfrac{b^n}{n^2}\right) z^n \text{ pro } 0 < a < b\ , \quad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} z^n \text{ pro } a > 0.$$

Rozviňte do řady náledující funkce:

$$6.\ \arctan x, \quad 7.\ \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad 8.\ \frac{1}{(1+x^2)^2}, \quad 9.\ \sin^2 x.$$

Výsledky a návody:

1. $R = 1$; $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

2. $R = 4$; $R = \lim \frac{a_n}{a_n+1} = \lim \frac{(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}$.

3. $R = 1$; $a_{n!} = \frac{1}{n!}$ a $a_k = 0$ jinak. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

4. $R = \frac{1}{b}$; 2 policajti : $\sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \le \sqrt[n]{na^n + \frac{b^n}{n^2}} \le \sqrt[n]{2nb^n}$.

5. $R = 0$ pro $a \le 1$ a $R = \infty$ pro $a > 1$; Zřejmé z $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$; Zintegrujte $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

8. $-1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n}$; $\frac{1}{1-x^2}$ je geometrická řada.

9. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^{2k}$; $\frac{1}{1+x^2}$ umíme a součin dvou řad podle vzorečku.

10. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$; $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ a řadu pro $\cos$ známe.

11. Nechť $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

$$\text{a) } f \in BV([0,1]) \Rightarrow f^2 \in BV([0,1]).$$

$$\text{b) } f^2 \in BV([0,1]) \Rightarrow f \in BV([0,1]).$$

12. Nechť $f \in AC([0,1])$. Ukažte, že pak $V^+f(x),\ V^-f(x) \in AC([0,1])$.

9. cvičení

Sečtěte

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}, \quad 2.\ \sum_{n=0}^{\infty}(n^2-2n)\Big(\frac{1}{3}\Big)^n, \quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}.$$

Výsledky a návody:

1. $1-\frac{\pi}{4}$; *Na funkci* $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}z^{2n+3}$ *použijeme Abelovu větu.*

$$g'(z) = \sum(-1)^n z^{2n+2} = 1 - \frac{1}{1+z^2},\ \textit{a tedy } g(z) = C + z - \arctan z.$$

2. $0; F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *má poloměr konvergence* 1.

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(z-1)^2}\ \textit{ a } F''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-2n)z^n = z^2F''(z) - zF'(z)\ \textit{ a dosadíme } z = \frac{1}{3}.$$

3. $\frac{11}{18}; F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}z^n$ *má poloměr konvergence* 1.

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+2}}{n} = z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} =: z^2G(z)\ \textit{ a } G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}.$$

Integrací $G(z) = -\log(1-z) + C$ *kde* $C = 0$, *a tedy* $F'(z) = -z^2 log(1-z)$ *dá*

$$F(z) = \frac{z}{3} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{9} - \frac{1}{3}z^3\log(1-z) + \frac{1}{3}\log(1-z) + C,\ \textit{ kde } C = 0 \textit{ a Abelova věta.}$$

5. Je funkce $x\sin\frac{1}{x}$ *absolutně spojitá?*

6. Nechť $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *je lipschitzovská,* $f \in AC([0,1])$ *a* $g \in BV([0,1])$. *Musí být* $F(f) \in AC([0,1])$ *a* $F(g) \in BV([0,1])$*?*

7. Nechť $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$. *Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):*

a) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$ *a* $f_n \in BV([0,1]) \Rightarrow f \in BV([0,1])$.

b) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$ *a* $V(f_n; 0,1) \le 10$ *pro všechna* $n \Rightarrow f \in BV([0,1])$.

10. cvičení

Nalezněte Fourierovy řady následujících funkcí. Vyšetřete, k čemu tato řada konverguje bodově a k čemu stejnoměrně:

1. $\operatorname{sgn}(x)$ *na* $(-\pi, \pi)$;

2. x^2 *na* $(0, 2\pi)$, *Co dostaneme v bodě* $x = 0$?;

3. *Napište* x^2 *na* $(0, \pi)$ *jako součet sinové řady*;

4. $\sin(ax)$ *na* $(-\pi, \pi)$ *pro* $a \notin \mathbf{Z}$.

Výsledky a návody:

$$1.\ 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \text{ pro všechna } x \in (0,\pi).$$

$$2.\ x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\Big) \text{ pro všechna } x \in (0,2\pi);$$

Dvakrát per-partes. Dosazením v 0 *dostaneme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$3.\ x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}\big((-1)^n - 1\big)\Big)\sin nx \text{ pro všechna } x \in (0,\pi);$$

Pracujeme s 2π*-periodickou funkcí, kde* $f(x) = x^2$ *na* $(0,\pi)$ *a* $f(x) = -x^2$ *na* $(-\pi, 0)$.

$$4.\ \sin ax = \frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2} \text{ pro všechna } x \in (-\pi,\pi);$$

Dle vzorce pro $\cos\alpha - \cos\beta$ *dostaneme* $\sin ax \sin kx = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\frac{ax-kx}{2}) - \cos(\frac{ax+kx}{2})\big)$.

5. *Je každá lipschitzovská funkce absolutně spojitá? Je každá absolutně spojitá funkce lipschitzovská?*

6. *Nechť* $f : [0,1] \to [0,\infty)$ *je absolutně spojitá. Musí být funkce* $\sqrt{f}$ *absolutně spojitá?*

11. cvičení

0. *Napište* e^x *na* $(0,\pi)$ *jako součet sinové řady.*

1. *Sečtěte* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ *a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$ *pro* $0 < \alpha < \pi$.

2. *Co tvrdí Parsevalova rovnost pro funkci* $f(x) = x^2$ *na* $[-\pi, \pi]$?

3. *Sečtěte* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ *pro* $q \in (-1,1)$. *Je tato řada Fourierovou řadou svého součtu?*

4. *Sečtěte* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ *a spočtěte* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx.$

Výsledky a návody:

$$0.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2k}{\pi(1+k^2)}(e^{\pi}(-1)^k - 1)\sin kx;\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin kx\, dx = \frac{2}{\pi} Im\Big(\int_0^{\pi} e^{(1+ki)x}\, dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi} Im\Big[\frac{e^{(1+ki)x}}{1+ki}\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} Im\Big(\frac{e^{(1+ki)\pi} - 1}{1+ki}\Big) = \frac{2}{\pi} Im\Big(\frac{1-ki}{1+k^2}\big(e^{\pi}\cos k\pi - 1 + ie^{\pi}\sin k\pi\big)\Big).$$

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{1}{2}\alpha(\pi - \alpha) \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \frac{1}{6}(\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2);$$

Aplikujeme Parsevalovu rovnost na $\chi_{[-\alpha,\alpha]}(x) = \dfrac{\alpha}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\sin k\alpha}{k\pi} \sin nx.$

Tím dostaneme první rovnost. Druhou z $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin^2 n\alpha}{n^2}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90};\ b_k = 0,\ a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$ *a* $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}.$

3. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}; = Im\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{inx}\Big)$ *a sečteme geometrickou řadu*

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(qe^{ix}\big)^n = \frac{1}{1-qe^{ix}} = \frac{1-qe^{-ix}}{1+q^2-2q\cos x}.$ *Funkce* $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$

je všude diferencovatelná, a tedy je Fourierovou řadou svého součtu.

4. $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ *a* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx = \frac{\pi}{n!}; \sum = Re\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}\Big).$

Z řady pro exponencielu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} = e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}\big(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)\big).$

Z jednoznačnosti koeficientů Fourierovy řady dostaneme hodnotu $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}.$

12. cvičení

Písemka na celou hodinu