

Doporučené příklady z Nelineární funkcionální analýzy II

1. cvičení

1. Nalezněte posloupnosti funkcí $u_k : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tak, že.
 - a) u_k konverguje slabě v L^1 , ale ne silně v L^1 .
 - b) u_k konverguje slabě v L^1 , ale ne slabě v L^2 .
 - c) u_k je omezená v L^1 , ale nelze vybrat slabě konvergentní podposloupnost v L^1 .
 - d) u_k konverguje v biting smyslu, ale nekonverguje w^* v mírách.
 - e) u_k konverguje v biting smyslu, ale k jiné funkci, než ke které konverguje w^* v mírách.
 - f) u_k konverguje v biting smyslu k 0, ale w^* v mírách konverguje k singulární míře.
7. Nechť $1 < p \leq \infty$ a $f \in L^p(0, 1)$ je 1-periodická na $\mathbf{R}$. Dokažte, že pro $f_k(x) = f(kx)$ platí $f_k \in L^p(0, 1)$,

$$f_k \xrightarrow{L^p} \int_0^1 f(x) dx \text{ pro } 1 < p < \infty \text{ a } f_k \xrightarrow{w^* \text{ in } L^\infty} \int_0^1 f(x) \text{ pro } p = \infty.$$

Návod: Zkuste nejprve testovat $\chi_{(a,b)}$, pak jednoduché ...

2. cvičení

2. Dokažte, že separátně konvexní funkce na $\mathbf{R}^n$ je lokálně lipschitzovská.
3. Nechť $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je separátně konvexní a

$$0 \leq f(x) \leq 1 + |x|^p.$$

Dokažte, že pak platí

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1}).$$

4. Ukažte, že separátně konvexní funkce nemusí být konvexní.
5. Nechť X je Banachův prostor a $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ je konvexní a zdola polospojité. Dokažte, že f je spojitá.
6. Ukažte, že na nekonečně rozměrném Banachově prostoru existuje konvexní nespojitá funkce.

3. cvičení

8. Nechť $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ má druhou derivaci v každém bodě. Ukažte, že f je konvexní, právě tehdy, když je f'' v každém bodě pozitivně definitní.
9. Ukažte, že norma $(x \rightarrow \|x\|)$ na Banachově prostoru je konvexní funkce.
10. Nechť $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ je konvexní funkce na Banachově prostoru a $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce. Za jakých předpokladů je $\Phi \circ F$ konvexní?

4. cvičení

- 6 $\frac{1}{2}$. Nalezněte co nejhezčí $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ a $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ takové, že: $f(\cdot, y)$ je měřitelná pro každé y , u je měřitelná a $f(x, \cdot)$ je skoro spojitá, ale $f(x, u(x))$ není měřitelná.
11. Nechť

$$F(u) := \int_{\Omega} f(Du(x)) dx$$

1

je konvexní funkcionál. Plyne odtud konvexita funkce f ?

12. Nechť $A \in \mathbf{R}^{n^2}$ je matice. Ukažte z definice, že $f(A) = \det(A)$ je kvazikonvexní funkce na $W^{1,\infty}$ alespoň pro $n = 2$.

13. Dokažte Mc Shane extension theorem.

14. Nechť $n \geq 2$. Ukažte, že funkce $A \rightarrow \det A$ není konvexní.

5. cvičení

15. Dá se najít nekonstantní konvexní funkce Φ , aby $\Phi(\det A)$ byla konvexní?

16. Ukažte, že následující funkce je polykonvexní. Pro $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, pro které je $J_u(x) > 0$ s.v., definujme

$$F(u) = \frac{|Du(x)|^n}{J_u(x)}.$$

17. Ukažte, že vyjádření polykonvexní funkce jako konvexní funkce minorů není jednoznačné.

6. cvičení

18. Ukažte, že každou rank-1 matici můžeme napsat jako tenzorový součin vektorů.

19. Nechť A, B jsou dvě $n \times n$ matice a $\text{rank}(A - B) = 1$. Ukažte, že existuje lipschitzovská funkce $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ taková, že $Df(x) \in \{A, B\}$ pro s.v. x a

$$\mathcal{L}^n(\{x : Df(x) = A\}) > 0 \text{ a } \mathcal{L}^n(\{x : Df(x) = B\}) > 0.$$

20. Nechť A, B jsou dvě $n \times n$ matice nechť existuje lipschitzovská funkce $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ taková, že $Df(x) \in \{A, B\}$ pro s.v. x a

$$\mathcal{L}^n(\{x : Df(x) = A\}) > 0 \text{ a } \mathcal{L}^n(\{x : Df(x) = B\}) > 0.$$

Ukažte, že pak nutně $\text{rank}(A - B) = 1$.

21. Nechť $M \in \mathbf{R}^{(mn) \times (mn)}$ je symetrická matice a $f(A) = \langle MA, A \rangle$. Dokažte

a) f je konvexní $\Leftrightarrow f(A) \geq 0 \forall A$,

b) f je rank-1 konvexní $\Leftrightarrow f(A) \geq 0 \forall A, \text{rank}(A) \leq 1$.

22. b) Nalezněte rank-1 konvexní obal matic

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Nalezněte rank-1 konvexní obal libovolných dvou předešlých matic.

Rank-1 konvexní obal matic $A_1, \dots, A_4$ je množina matic A taková, že pro každou rank-1 konvexní funkci f s $f(A_i) = 0$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí $f(A) \leq 0$.

6. cvičení

23. Ukažte, že funkce f je kvazikonvexní právě tehdy, když pro každou krychli D , pro každou matici A a pro každou $\varphi \in C_0^\infty(D)$ platí

$$|D| \cdot f(A) \leq \int_D f(A + \nabla \varphi(x)) \, dx.$$

24. Necht $0 < a < 2$. Pomocí Mountain Pass Theorem ukažte, že ve $W_0^{1,2}([0,1]^2)$ existuje nenulový kritický bod funkcionálu

$$\int_{(0,1)^2} |Du|^2 - \int_{(0,1)^2} (e^{u^a} - 1).$$

Budete asi potřebovat, že vnoření $W_0^{1,2}([0,1]^2)$ do Orliczova prostoru $\exp L^a$ je kompaktní. Pokud mi chybí nějaké předpoklady, tak si je doplňte nebo upravte ;).

7. cvičení

25. Necht $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ má lipschitzovskou hranici. Pomocí Polyä-Szegö principle dokažte, že $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ pro $p > n$.

26. Necht $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ má lipschitzovskou hranici. Pomocí Polyä-Szegö principle dokažte, že $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow \exp L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$ pro $p > n$.