Úvod

1. cvičení - Opakování středoškolské látky

Vyřešte

$$\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$$
$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=1$$
$$||x-3|-2|=1$$
$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+2\right) \geq 0$$

Výsledky: 1. $(-\infty,-4] \cup \{1\}$ 2. $x=6$ 3. $x \in \{0,2,4,6\}$. 4. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right) \cup \left(2,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ z $0 < x^2-3x+2 \leq 1$.

Výroky
Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

$$1. \forall x,y \in \mathbf{R}\ x^2+y^2>0.$$
$$2. \forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [(y \leq x) \wedge (y+1>x)].$$
$$3. \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in \mathbf{R}\ [(0<|x-1|<\delta) \Rightarrow (|x-3|<\varepsilon)].$$

Negace

$$1. \exists x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R}\ x^2+y^2 \leq 0.$$
$$2. \exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{N}\ [(y>x) \vee (y+1 \leq x)].$$
$$3. \exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x \in \mathbf{R}\ [(0<|x-1|<\delta) \wedge (|x-3| \geq \varepsilon)].$$

U všech tří výroků platí negace. 1. vol $x=y=0$. 2. vol $x=-1$, nelze najít $y \in \mathbf{N}$. 3. vol $\varepsilon=1$ a po zadání libovolného $\delta>0$ vol $x=1-\frac{\delta}{2}$.

Nalezení inverze. Mějme zadanou funkci $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte definiční obor D_f, inverzi f^{-1} a obor hodnot H_f.
Výsledky: $D_f=[0,\infty) \setminus \{16\}$, $f^{-1}(y)=\left(\dfrac{4y}{y+2}\right)^2$ pro $y \in H_f$ a $H_f=(-\infty,-2) \cup [0,\infty)$.

Příklady na matematickou indukci
Dokažte:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2, \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N}.$$
$$2.\ \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N}.$$
$$3.\ 2^n \geq n^2, \text{ pro všechna } n \geq 4.$$
$$4.\ (1+x)^n \geq (1+nx), \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N} \text{ a } x>-1.$$

Návody:

$$2. \sum_{i=1}^{n+1} i^2=\sum_{i=1}^{n} i^2+(n+1)^2,$$
$$3. 2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2,$$
$$4. (1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq (1+(n+1)x),$$

2. cvičení - Metody důkazů

1. *Dokažte:* Pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí : a) $|x+y| \leq |x|+|y|$, b) $||x|-|y|| \leq |x-y|$.
Návod: a) Bez újmy na obecnosti $x \geq 0$. Pokud $y \geq 0$, tak jistě $x+y \leq x+y$. Pokud $y \leq 0$, tak jistě platí $x+y \leq x-y$ i $-x-y \leq x-y$.
2. *Dokažte, že* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *je iracionální.*

Operace s množinami
3. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset Y$. Dokažte, že

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ a } f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

4. Mějme 3 množiny A, B a X. Dokažte

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \text{ a } X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

5. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset X$. Rozhodněte, zda platí

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ a } f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Návod na 3.b) $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A$ a $f(x) \notin B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ a $x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
Návod na 4.a) $x \in X \setminus (A \cap B) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A \cap B) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
5. a) platí

$$\begin{aligned} x \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists y \in A \cup B, f(y) = x \Leftrightarrow (\exists y \in A, f(y) = x) \text{ nebo } (\exists y \in B, f(y) = x) \\ \Leftrightarrow (x \in f(A)) \text{ nebo } (x \in f(B)) \Leftrightarrow x \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

b) a c) neplatí - stačí konstantní funkce. Například u b) platí jen tato implikace

$$\begin{aligned} x \in f(A \cap B) \Leftrightarrow \exists y \in A \cap B, f(y) = x \Rightarrow (\exists y_1 \in A, f(y_1) = x) \text{ a } (\exists y_2 \in B, f(y_2) = x) \\ \Leftrightarrow (x \in f(A)) \text{ a } (x \in f(B)) \Leftrightarrow x \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

7.*Dokažte binomickou větu, tj. dokažte, že pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a pro každá* $a, b \in \mathbf{R}$ *platí*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Matematická indukce, využije se vztahu $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
8. *Pro libovolné* $n \in \mathbf{N}$ *a* $x \in \mathbf{R}$ *sečtěte výraz* $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.
Lze použít Moivreovu větu a vzorec pro součet geometrické řady. Dostaneme 0 pro $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, pro ostatní x máme výsledek

$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Lze to dokázat i indukcí.

A něco trochu netriviálního na závěr
9*. Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\ .$$

Návody: 1. Dokazujte matematickou indukcí 1. krok pro $n = 1$. 2. krok z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $2n$. 3. krok z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $n-1$. Hint - zkuste volit $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}$.

3. cvičení - Supremum a infimum

Nalezněte suprema a infima následujících množin

$$M_1 = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n}, \quad M_2 = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad M_3 = [0,1),$$
$$M_4 = \{2^{-n},\ n \in \mathbf{N}\}, \quad M_5 = \{\frac{p}{p+q},\ p,q \in \mathbf{N}\}$$

Výsledky a návody:
$\sup M_1 = 1$: 1. $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{n} \le 1$. 2. $\forall r < 1$ vol $n = 1$, pak $\frac{1}{1} = 1 > r$.
$\inf M_1 = 0$: 1. $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{n} \ge 0$. 2. $\forall r > 0 = \inf$ vol $n = [1/r] + 1$, pak $\frac{1}{n} < r$.
$\inf M_2 = 0$: 1. $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{\sqrt{n}} \ge 0$. 2. $\forall r > 0 = \inf$ vol $n = [1/r^2] + 1$, pak $\frac{1}{\sqrt{n}} < r$.
$\inf M_3 = 0$: 1. $\forall x \in [0,1), x \ge 0$. 2. $\forall r > 0$ vol $x = 0$, pak $0 < r$.
$\sup M_3 = 1$: 1. $\forall x \in [0,1), x \le 1$. 2. $\forall r < 1$ vol $x = \max\{\frac{1+r}{2}, 0\}$. Pak $x \in [0,1)$ a $x > r$.
$\sup M_4 = \frac{1}{2}$, neboť je to maximum.
$\inf M_4 = 0$: 2. $\forall r > 0$ vol $n = [\log_2 1/r] + 2$, pak $2^{-n} < r$.
$\inf M_5 = 0$: 2. $\forall r > 0$ vol $p = 1$ a $q = [\frac{1-r}{r}] + 2$, pak $\frac{p}{p+q} < r$.
$\sup M_5 = 1$: 2. $\forall r < 1$ vol $q = 1$ a $p = [\frac{r}{1-r}] + 2$, pak $\frac{p}{p+q} > r$.

Příklad na zamyšlení: Mějme zadané množiny $A, B \subset \mathbf{R}$, pro které existují $s_A = \sup A$, $i_A = \inf A$, $s_B = \sup B$ a $i_B = \inf B$. Co můžete obecně říci o supremu S a infimu I množin $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$ a $A \setminus B = \{a \in A,\ a \notin B\}$?
Výsledky: 1. $S = \max\{s_A, s_B\}$ a $I = \min\{i_A, i_B\}$
2. Pokud $A \cap B \ne \emptyset$, pak $S \le \min\{s_A, s_B\}$, $I \ge \max\{i_A, i_B\}$ a více říci nelze
3. $S = s_A + s_B$ a $I = i_A + i_B$
4. Pokud $A \setminus B \ne \emptyset$, pak $S \le s_A$, $I \ge i_A$ a obecně více říci nelze

Další teoretický příklad: Nechť M je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbf{R}$ a $g\colon M \to \mathbf{R}$ jsou funkce. Dokažte:
Jsou-li f a g shora omezené, potom $\sup(f+g)(M) \le \sup f(M) + \sup g(M)$.
Jsou-li f a g zdola omezené, potom $\inf(f+g)(M) \ge \inf f(M) + \inf g(M)$.
Mohou být tyto nerovnosti neostré?

4. cvičení - Mohutnosti množin

1. Porovnejte mohutnosti množin $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, $\mathbf{R}$, $\mathcal{P}(\mathbf{R})$, $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]^2$, $P_{0-9} :=$ {množina všech posloupností přirozených čísel} ,
$P_{01} :=$ {množina posloupností nul a jedniček}, $K :=$ {množina konečných podmnožin $\mathbf{N}$}.
Výsledky a návody:

$$\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx K \prec \mathcal{P}(\mathbf{N}) \approx \mathbf{R} \approx [0,1] \approx (0,1) \approx [0,1) \approx [0,1]^2 \approx P_{01} \approx P_{0-9} \prec \mathcal{P}(\mathbf{R}).$$

a) $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}^k$ a každá z množin $\mathbf{N}^k$ je spočetná.
b) $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \approx P_{01}$. K dané $a \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ si vezmu posloupnost 0 a 1 tak, že 1 (nebo 0) na prvním mště říká, že 1 je (není) v a, 1 (nebo 0) na druhém mště říká, že 2 je (není) v a atd.
c) $P_{01} \approx [0,1]$ - idea - Představte si zápis reálného čísla ve dvojkové soustavě.
d) $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \approx P_{0-9}$: $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \preceq P_{0-9}$ - Množinu $a \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ zobrazím na $a \in P_{0-9}$ (to je prosté).
$P_{0-9} \preceq \mathcal{P}(\mathbf{N})$ - Množinu $a = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \in P_{0-9}$ zobrazím na $\{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ (to je prosté).
e) $[0,1] \approx [0,1]^2$: idea - $[a,b] \in [0,1]^2$ s desetinným zápisem $a = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ zobrazím na čislo $0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$.

2. Dokažte následující tvrzení:

a) Podmnožina spočetné množiny je spočetná
b) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
c) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.

3*. Sestrojte nespočetně mnoho podmnožin $\mathbf{N}$ takových, že každé dvě mají jen konečný průnik.

Limity posloupností

5. cvičení - Aritmetika limit

Spočtěte následující limity podle definice:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n},\quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\ .$$

Za užití věty o aritmetice limit spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2-7},\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1},\quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1},$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n},\quad 5.\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\Big),\quad 6.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$7.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}\ \text{pro}\ |a|<1\ \text{a}\ |b|<1,\quad 8.\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}\ .$$

Výsledky a návody:

$$1.\ \frac{1}{2};\ 2.\ 2;\ 3.\ 0;$$

$$4.\ 0,\ 0\le\frac{n}{2^n}\le\frac{1}{n}\ \text{pro}\ n\ge 4;$$

$$5.\ -\frac{1}{2};\ \text{Použijeme}\ \sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1).$$

$$6.\ \frac{1}{3};\ \text{Použijeme}\ \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \text{z prvního cvičení.}$$

$$7.\ \frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}=\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{1-b}{1-a};$$

$$8.\ \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}=\frac{n^{100}+\binom{100}{1}n^{99}4+\ldots-(n^{100}+\binom{100}{1}n^{99}3+\ldots)}{n^{100}+\binom{100}{1}n^{99}2+\ldots-n^{100}}=$$

$$=\frac{100n^{99}+\ldots}{200n^{99}+\ldots}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2};$$

9. Nechť a_n je zadaná posloupnost a $a\in\mathbf{R}$. Dokažte ekvivalenci následujících výroků:

$$A)\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbf{N}\ \forall n\ge n_0:\ |a_n-a|<\varepsilon;$$

$$B)\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbf{N}\ \forall n\ge n_0:\ |a_n-a|<2\varepsilon.$$

6. cvičení - Dva policajti

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1000^n}{n!},\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n},\quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^5}{n^6+n!},\quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1},$$

$$5.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n},\quad 6.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\ \text{pro}\ a>b>0.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ 0;\ \frac{1000^n}{n!} \le \frac{1000^{1001}}{1000!}\frac{1}{n} \text{ pro } n \ge 1000.$$

$$2.\ 0,\ 0 \le \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} \le \frac{1}{n};$$

$$3.\ 0,\ 0 \le \frac{3^n+n^5}{n^6+n!} \le \frac{3^n+n^5}{n!} \text{ a } \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{n!} = 0 \text{ opět podle 2 policajtů;}$$

$$0 \le \frac{n^5}{n!} \le \frac{n^5}{n(n-1)\dots(n-5)} \to 0;\ 0 \le \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{3}{n} \le \frac{27}{2n} \to 0.$$

$$4.\ 0,\ -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \le \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0;$$

$$5.\ 4;\ \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{2^n+4^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 4^n}.$$

$$6.\ \frac{1}{a};\ \frac{a}{a^2\sqrt[n]{2}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{2a^{2n}}} \le \frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}} \le \frac{\sqrt[n]{2a^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}}} = \frac{a\sqrt[n]{2}}{a^2}.$$

7. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

$$A)\ \text{Existuje } \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \text{ existuje } \lim_{n\to\infty}|a_n|;$$

$$B)\ \text{Existuje } \lim_{n\to\infty} |a_n| \Rightarrow \text{ existuje } \lim_{n\to\infty} a_n.$$

8. Nechť je posloupnost x_n konvergentní a posloupnost y_n divergentní. Je možné říci, že posloupnosti $x_n + y_n$ nebo $x_n y_n$ jsou také divergentní?

7. cvičení - Rozdíly odmocnin

Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\frac{n\pi}{4})$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n$, 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[2]{n^2+1}$, 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Výsledky a návody:

1. neexistuje; Věta o limitě vybrané posloupnosti pro a_{8k} a a_{8k+2}.

$$2.\ \frac{1}{2};\ \sqrt{n^2+n}-n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

$$3.\ 0;\ \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{(n)^2}} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

$$4.\ 3;\ 3 \le \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 3^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 3 \text{ a } \lim\sqrt[n]{3} = 1 \text{ podle 2 policajtů.}$$

5. neexistuje ; dokažte, že $\lim a_{2n} = \frac{1}{2}$ a $\lim a_{2n+1} = -\frac{1}{2}$.
Použijte větu o limitě vybrané posloupnosti.

6. 0; $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[2]{n^2+1} = \sqrt[6]{(n^3+1)^2}-\sqrt[6]{(n^2+1)^3}$
a použijte vzorec $(a^6-b^6) = (a-b)(a^5+\cdots)$.

7. 1; za pomoci binomické věty dokažte, že $1 \le \sqrt[n]{n} \le 1+\frac{10}{\sqrt{n}}$ pro n dostatečně velké.

8. Nechť a_n a b_n jsou dvě posloupnosti takové, že existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
A) $A \le B \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \ge n_0 : a_n \le b_n$,
B) $a_n < b_n \Rightarrow A < B$.

9. Pro každé $A \in [0,\infty]$ sestrojte posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ a } \lim_{n\to\infty} a_n b_n = A.$$

10*. Dokažte Stolzovu větu (diskrétní analogie l'Hospitalova pravidla). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Nechť $A \in \mathbf{R}^*$ a platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A.$$
Pak platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

8. cvičení - Trošku těžší příklady

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+n)}{\log(n^3-1)}, \quad 2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+3^n)}{\log(1+n+e^{2n})},$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2 n}-\sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}, \quad 4.\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}},$$

$$5.\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \quad 6.\ \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}).$$

Výsledky a návody:

$$1.\ \frac{2}{3};\ \frac{\log(\frac{1}{2}n^2)}{\log(n^3)} \le \frac{\log(n^2+n)}{\log(n^3-1)} \le \frac{\log(2n^2)}{\log(\frac{1}{2}n^3)} = \frac{\log 2+2\log n}{\log\frac{1}{2}+3\log n}.$$

$$2.\ \frac{\log 3}{2};\frac{\log(3^n)}{\log(3\cdot e^{2n})} \le \frac{\log(n^2+3^n)}{\log(1+n+e^{2n})} \le \frac{\log(2\cdot 3^n)}{\log(e^{2n})} = \frac{\log 2+n\log 3}{2n}.$$

$$3.\ \frac{1}{2};\frac{\sqrt{n+\sin^2 n}-\sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} = \frac{\sin^2 n+\cos^2 n}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+\sin^2 n}+\sqrt{n-\cos^2 n}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-(-1)}} \le \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+\sin^2 n}+\sqrt{n-\cos^2 n}} \le \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+(-1)}+\sqrt{n-1}}.$$

$$4.\ \frac{2}{\sqrt{3}};\ \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}} = \sqrt[n]{\frac{3^n+2\cdot 2^n-3^n-2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}} \text{ a policajti}$$

$$\frac{2}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}} \le \frac{2}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[2n]{3\cdot 3^n}} \le \frac{2}{\sqrt[n]{2\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}}} \le \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}}$$

$$\text{a } \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}} \le \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2^n}}} \le \frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$5.\ 1;\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big) = 1-\frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1.$$

$$6.\ \frac{1}{2};\ (1-\frac{1}{2^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{2^2-1}{2^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2} =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

7. Dokažte, že
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$$
a
$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

8. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in (0,\infty)$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

9*. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

9. cvičení - Rekurentně zadané posloupnosti

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}a_n,\ \text{kde } a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}\ \text{a } a_1=10,\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty}a_n,\ \text{kde } a_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(a_n+\frac{1}{a_n}\Big)\ \text{a } a_1>0,$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}),\quad 5.\ \lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

Výsledky a návody:

1. 5; Ukažte, že a_n je klesající, a pomocí indukce dokažte, že $a_n\ge 5$. Tedy existuje limita.

$$\text{Zlimitíme vztah } a_{n+1}=6-\frac{5}{a_n}\ \text{a dostaneme } A=6-\frac{5}{A},\ \text{a tedy } A=5.$$

2. 2; Ukažte, že a_n je rostoucí, a pomocí indukce dokažte, že $a_n\le 2$. Tedy existuje limita.

$$\text{Zlimitíme vztah } a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\ \text{a dostaneme } A=\sqrt{2+A},\ \text{a tedy } A=2.$$

3. 1; Rozlište, jestli $a_1\ge 1$ nebo $a_1\le 1$.

$$4.\ 0;\ 0\le\sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\frac{\sqrt{n}(3-2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}\le\frac{\sqrt{n}}{n}\overset{n\to\infty}{\to}0.$$

$$5.\ 0;\ |\sin(\pi\sqrt{n^2+1})|=|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})-\sin(\pi n)|=$$

$$=\Big|2\sin\big(\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1}-n)\big)\cos(.)\Big|\le 2\sin\Big(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}\Big)\overset{n\to\infty}{\to}0.$$

6. Nechť jsou posloupnosti x_n a y_n divergentní. Je možné říci, že posloupnosti x_n+y_n nebo x_ny_n jsou také divergentní?

7. Nechť $\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$. Je možné říci, že platí buď $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ nebo $\lim_{n\to\infty}y_n=0$?

8*. Nechť $a_1<a_2$ jsou zadané a $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$, $n\ge 3$, je rekurentně zadaná. Ukažte, že existuje limita a spočtěte ji.

Výsledky a návody:

$$8.\ \frac{1}{3}(a_1+2a_2);\ \text{Dokažte indukcí, že } a_{2k-1}<a_{2k+1}<a_{2k+2}<a_{2k}.$$

Tedy existuje limita suhých členů a existuje limita lichých členů.

9*. Dokažte, že existuje limita $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$.

10. cvičení - První zápočtová písemka

11. cvičení - Těžší příklady

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!},\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^a}\ \text{pro } a>0,$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{(n^4+n)^{50}-(n+1)^{200}}{(n+1)^{202}-n^{202}},\quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!},$$

$$5. \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n 2^n + \sqrt[2n]{n}}{(-1)^n 3^n + \sqrt[3n]{n}}}, \quad 6. \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} \text{ pro } k \in \mathbf{N},\ a > 1.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ 1; \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \frac{1 + \frac{1}{n+2}}{1 - \frac{1}{n+2}}.$$

$$2.\ 1; \sqrt[n]{n^a} \le \left(\sqrt[n]{n}\right)^{[a]+1} \text{ a použijeme 7. příklad 7. cvičení.}$$

$$3.\ -\frac{200}{101}; \frac{\sqrt{n^3} + \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \text{ je zhruba } \frac{n^{3/2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}, \text{ zbytek pomocí binomické věty.}$$

$$4.\ \infty;\ n! \ge \left(\frac{n}{2}\right)^{n/3} \text{ a tedy } \sqrt[n]{n!} \ge \sqrt[3]{\frac{n}{2}} \overset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

$$5.\ \frac{2}{3}; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \text{ a tedy } 1 \le \sqrt[3n]{n} \le \sqrt[2n]{n} \le 2 \text{ pro dost velké } n.$$

$$6.\ 0;\ \text{Použijeme } 2k \text{ krát větu o limitě součinu a dostaneme } = \left(\lim \frac{\sqrt{n}}{\left(a^{\frac{1}{2k}}\right)^n}\right)^{2k}.$$

$$\text{Tedy stačí } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{b^n} = 0 \text{ pro } b > 1. \text{ Policajti } 0 \le \frac{\sqrt{n}}{(1 + (b-1))^n} \le \frac{\sqrt{n}}{1 + n(b-1)} \to 0.$$

7. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = \{0, 1, 3\}$.

8.*. A) Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = [0, 1]$.
B) Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = [0, \infty]$.
C) Může být množina hromadných bodů rovna $H(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$?

Limity funkcí

12. cvičení

Spočtěte následující limity:

$$1. \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad 2. \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2 - x - 2\right)^{20}}{\left(x^3 - 12x + 16\right)^{10}}, \quad 4. \lim_{x\to\infty} \frac{x}{[x]},$$

$$5. \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right], \quad 6. \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}, \quad 7. \lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ 2; \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}.$$

$$2.\ \frac{1}{2}; = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}.$$

$$3.\ \frac{3^{10}}{2^{10}}; = \lim_{x\to 2} \frac{((x-2)(x+1))^{20}}{((x-2)^2(x+4))^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}}.$$

$$4.\ 1; x - 1 \le [x] \le x.$$

$$5.\ 1; \frac{1}{x} - 1 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}.$$

6. $\frac{3}{2}$; $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}} =$

$$= \frac{x+1-(1-x)}{x+1-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}.$$

7. $\frac{n(n+1)}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1} + \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} + \ldots + \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1} =$

$$= 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. Nechť $a \in \mathbf{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = A \text{ a } \lim_{x\to a-} f(x) = A.$$

9. Limes superior a limes inferior pro funkce je definován jako

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \inf f(P(a,\delta)) \text{ a } \limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup f(P(a,\delta)).$$

Dokažte, že

$$\liminf_{x\to a}(f(x)+g(x)) \geq \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x)$$

a

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) \leq \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x).$$

10. Dokažte, že

$$\text{Existuje } \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x).$$

13. cvičení

Považujte za známé následující limity :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Spočtěte následující limity:

$$1. \lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}, \quad 2. \lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\Big),$$

$$3. \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} \text{ pro } m,n\in\mathbf{N}, \quad 4. \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x},$$

$$5. \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}, \quad 6. \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

Výsledky a návody:

$$1. \ \frac{49}{24}; = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x-1)}$$

2. $\infty; = \lim\limits_{x\to 2}\Big(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{(x-1)(x-2))}\Big) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)-(x(x-2))}{x(x-2)^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+3x-1}{x(x-2)^2(x-1)}.$

3. $\frac{nm}{2}(n-m)$; Použijeme binomickou větu. Členy s x^k pro $k>2$ jdou k nule.

$$= \frac{\binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}mx + \binom{n}{2}(mx)^2 + \cdots}{x^2} - \frac{\binom{m}{0}1^m + \binom{m}{1}nx + \binom{m}{2}(nx)^2 + \cdots}{x^2}.$$

4. $\ln(2)$; $\ln 2 = \dfrac{\ln 2^x}{x} \leq \dfrac{\ln(1+2^x)}{x} \leq \dfrac{\ln(2\cdot 2^x)}{x} = \dfrac{\ln 2 + x\ln 2}{x} \overset{x\to\infty}{\to} \ln 2.$

5. $\frac{4}{3}$; $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\,\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}} \overset{x\to 0}{\to} \dfrac{2}{1+\frac{1}{2}}.$

6. $\frac{1}{144}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-(-2)}{x^3+8}\,\dfrac{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}=$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x-6-(-2)^3}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}=\frac{1}{12}\frac{1}{4+4+4}.$$

7. Nechť $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících implikací.

$A)$ f,g jsou omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je omezená.

$B)$ f,g jsou shora omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je shora omezená.

$C)$ f,g jsou rostoucí $\Rightarrow f\cdot g$ je rostoucí.

8. Dokažte, že Riemannova funkce

$$D(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pro } x\in\mathbf{Q},\ x=\frac{p}{q} \text{ pro } p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N} \text{ nesoudělná}\\ 0 & \text{pro } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

je spojitá na $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

9. Dokažte si větu, že jedna děleno "kladná nula" je ∞. Nechť $\lim_{x\to a}g(x)=0$ a existuje $\delta>0$ tak, že $g(x)>0$ na $P(a,\delta)$. Pak $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$.

14. cvičení

Považujte za známé následující limity :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin3x}{\sin x},\quad 2.\ \lim_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x},\quad 3.\ \lim_{x\to0}\frac{\log(1+\sin x)}{x},$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}},\quad 5.\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin(x^3)},$$

$$6.\ \lim_{x\to0}\frac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{\log(1+\sqrt[3]{x})},\quad 7.\ \lim_{x\to0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3},\quad 8.\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\ \text{pro } m,n\in\mathbf{N}.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ 2;=\lim_{x\to0}\frac{5x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}-\lim_{x\to0}\frac{3x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}.$$

$$2.\ -1;=\lim_{x\to0}\frac{x\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}{x\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}}.$$

$$3.\ 1;\ \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\overset{x\to0}{\to}1.$$

$$4.\ 1;\ \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\overset{x\to\infty}{\to}1.$$

$$5.\ \frac{1}{2};=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\frac{\sin x^3}{x^3}}.$$

$$6.\ 1;\ \frac{\arcsin\sqrt[3]{x}}{\log(1+\sqrt[3]{x})}=\frac{1}{\frac{\sin(\arcsin\sqrt[3]{x})}{\arcsin\sqrt[3]{x}}}\frac{1}{\frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}}\overset{x\to0}{\to}\frac{1}{1}\frac{1}{1}.$$

7. -2; $\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3} = -2\dfrac{\sin\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x-xe^{-x}}{2}}\dfrac{\sin\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}{\frac{xe^x+xe^{-x}}{2}}\dfrac{xe^x-xe^{-x}}{2x^2}\dfrac{xe^x+xe^{-x}}{2x} \overset{x\to 0}{\to} -2$

kde jsme použili standartní limity a $\dfrac{xe^x-xe^{-x}}{2x^2} = \dfrac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{2x} \overset{x\to 0}{\to} \dfrac{1}{2} - \dfrac{-1}{2}$.

$$8.\ (-1)^{m-n}\frac{m}{n};\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin m(y+\pi)}{\sin n(y+\pi)} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin my\cos m\pi + \sin m\pi\cos my}{\sin ny\cos n\pi + \sin n\pi\cos ny} = \lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny} = (-1)^{m-n}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sin my}{my}}{\frac{\sin ny}{ny}}\frac{m}{n}.$$

9*. Sestrojte funkci $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, která každý interval zobrazí na $\mathbf{R}$, tedy pro každé $a<b$ platí $f((a,b))=\mathbf{R}$.

15. cvičení - 1^∞

Považujte za známé následující limity :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{3x}},\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2},\quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}},\quad 5.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}},\quad 6.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Výsledky a návody:

$$1.\ e^{\frac{4}{3}};\ (1+4x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{4}{3}\frac{ln(1+4x)}{4x}}.$$

$$2.\ \frac{-1}{2};\ \frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2} \overset{x\to 0}{\to} \frac{-1}{2}.$$

$$3.\ 1;\quad \text{Podle Heineho } = e^{\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3+3x^2}\log(\frac{x^2+1}{x^2-1})}$$

$$\text{a standartně } \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^3+3x^2}}{x^2-1}\frac{\log(1+\frac{2}{x^2-1})}{\frac{2}{x^2-1}} = 0\cdot 1 = 0.$$

$$4.\ e^2;\ (2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\frac{\log(1+(2e^x-2))}{(2e^x-2)}\frac{2e^x-2}{2x}(x^2+1)2} \overset{x\to 0}{\to} e^{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2}.$$

$$5.\ 0; = e^{\lim_{x\to\infty}\log(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1})\frac{x^3}{1-x}} = e^{\log(\frac{3}{2})\cdot(-\infty)} = e^{-\infty}.$$

$$6.\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\ln\left(1+\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1} = \frac{2^x-3^x}{x}\frac{1}{1+x3^x}$$

a nyní použijeme $\dfrac{2^x-3^x}{x} = \dfrac{2^x-1-(3^x-1)}{x} = \dfrac{e^{x\ln 2}-1-(e^{x\ln 3}-1)}{x} \overset{x\to 0}{\to} \ln 2 - \ln 3$.

6*. Nechť $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je rostoucí. Může být f nespojitá
a) na nekonečné množině?
b) ve všech bodech $\mathbf{Q}$?
c) v nespočetně mnoha bodech?

16. cvičení - Trochu těžší příklady

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},\quad n\in\mathbf{N},\quad 3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right),\quad 5.\ \lim_{x\to\infty}\log\left(1+2^x\right)\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

$$6.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x},\quad 7.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\tan x}.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ -\frac{1}{16};\ \text{Rozšíříme } \sqrt{x+13}-\sqrt{4(x+1)}.$$

$$2.\ \frac{1}{n};\ \text{Rozšíříme podle vzorce } a^n-b^n.$$

$$3.\ \frac{1}{4};\ \text{Rozšiř a } \frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

$$4.\ \frac{7}{3};\ \text{Rozšiř podle } a^3-b^3.$$

$$5.\ 3\log 2;\ \frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}\to 1 \text{ a } \log(2^x)\le\log(1+2^x)\le\log(2\cdot 2^x).$$

$$6.\ e^{-1};\ \text{Standardně převedeme na exponencielu.}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\log(\tan x)}{\tan x-1}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan(2x)(\tan x-1)=1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}{(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{2\sin x}{\cos x+\sin x}.$$

$$7.\ 1-\sqrt{3};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}x-\sqrt{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

8**. Sestrojte spojitou funkci $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, která není monotónní na žádném intervalu.

17. cvičení - - Trochu těžší příklady

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n\ 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+e^x)}{\log(x^4+e^{2x})},$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\tan x},\quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right),\quad 5.\ \lim_{x\to 1}\left(1+\sin(\pi x)\right)^{\operatorname{cotan}(\pi x)}$$

$$6.\ \lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right),\quad 7.\ \lim_{x\to 0+}x\log x.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ e;\ \text{Heine, standardní převod na exponencielu a rozšiř} a^2-b^2.$$

$$2.\ \frac{1}{2};\ \text{Standardně se zbavíme logaritmů a požijeme známé limity.}$$

$$3.\ 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1-(e^{\arcsin x}-1)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}-\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin x}.$$

$$4.\ 0;\ \lim_{n\to\infty}\sin(2\pi\sqrt{n^2+1}-2\pi n)\ \text{a pak Heine a } a^2-b^2$$

$$5.\ e^{-1};\ \text{Standardně převedeme na } e^{\lim_{x\to 1}\operatorname{cotan}(\pi x)\sin(\pi x)}$$

$$6.\ \frac{1}{2};\ \text{Substituce (VOLSF) } \frac{x}{x+1}=y \text{ převedeme na } \lim_{y\to 1}\frac{y}{1-y}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan(y)\right).$$

Substituce (VOLSF) $y=\tan\big(\frac{\pi}{4}+z\big)$ převedeme na $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{1-\tan(\frac{\pi}{4}+z)}(-z)=$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{4}+z)}{\cos(\frac{\pi}{4}+z)-\sin(\frac{\pi}{4}+z)}(-z)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos z\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin z\frac{\sqrt{2}}{2}-(\sin z\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos z\frac{\sqrt{2}}{2})}(-z).$$

7. 0; Substituce (VOLSF) $x=e^{-y}$ převede na $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}(-y)$.

Z definice exponenciely $e^y>1+y+\dfrac{y^2}{2}$, tedy $\dfrac{y}{e^y}\le\dfrac{y}{\frac{y^2}{2}}\overset{y\to\infty}{\to}0$.

Derivace, průběh funkce a Taylorův polynom

18. cvičení - Derivace funkce

Zderivujte následující funkce a určete definiční obor derivace:

1. $x^2e^{-x^2}$, 2. $\log\big(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\big)$, 3. $f(x)=x^2\sin\big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\big)$ pro $x\neq 0$ a $f(0)=0$,

4. $\log(\log\sin x)$, 5. $x^{\log x}$, 6. $\arccos(1-x^2)$, 7. x^{x^x}.

8. Pro funkci $f(x)=\arcsin x-\arccos(\sqrt{1-x^2})$ dokažte, že $f(0)=0$ a spočtěte $f'_+(0)$ a $f'_-(0)$.

9. Dokažte, že $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$ pro $x\neq 0$.

10. Dokažte, že $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Výsledky a návody:

1. $2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}(-2x)$, $D_{f'}=\mathbf{R}$. 2. $\dfrac{4x}{x^4-1}$, $D_{f'}=\mathbf{R}\setminus[-1,1]$.

3. $f'(x)=2x\sin\big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\big)+x^2\cos\big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\big)\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ pro $x\neq 0$ a $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\big(\frac{1}{\sqrt[3]{h}}\big)}{h}=0$.

4. $D_f=\emptyset=D_{f'}$. 5.$(x^{\log x})'=(e^{\log^2 x})'=x^{\log x}2\log x\dfrac{1}{x}$, $D_{f'}=(0,\infty)$.

6. $D_f=[-\sqrt{2}.\sqrt{2}]$, $D_{f'}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\setminus\{0\}$, $f'=\dfrac{2\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2-x^2}}$ na $D_{f'}$,

$f'_+(0)=\sqrt{2}$, $f'_-(0)=-\sqrt{2}$, $f'_-(\sqrt{2})=\infty$ a $f'_+(-\sqrt{2})=-\infty$.

7. $(x^{x^x})'=(e^{\log x e^{x\log x}})'=x^{x^x}\big(\dfrac{1}{x}x^x+x^x\log x(\log x+1)\big)$, $D_{f'}=(0,\infty)$.

8.$f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=2$; $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. Nechť $f(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}$, pak $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\dfrac{-1}{x^2}=0$,

a tedy $f(x)$ je konstantní funkce. Z $f(1)=2\arctan 1=\dfrac{\pi}{2}$ dostaneme hodnotu konstanty.

10. V 0 mají funkce stejnou hodnotu. Ukažte, že $(\arctan x)'=(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})'$.

11. Nechť $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy sestrojte protipříklad, nebo to dokažte či odkažte na větu z přednášky):

(i) $\exists f'(0)\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ je v 0 spojitá.

(ii) $\exists f'(0)\in\mathbf{R}^*\Rightarrow f$ je v 0 spojitá.

(iii) f je v 0 spojitá $\Rightarrow\exists f'(0)\in\mathbf{R}^*$.

12. Sestrojte funkci $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tak, že $f'(x)$ existuje vlastní pro všechna $x\in\mathbf{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

19. cvičení - Derivace funkce v problémových bodech

U následujících funkcí spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují:

$$1.\ x^2\exp(-|x-1|),\quad 2.\ \max\{\min\{\cos x,(\tfrac{1}{2})\},(-\tfrac{1}{2})\},\quad 3.\ \frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$4.\ f(x)=\begin{cases}x^2\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x\neq 0,\\ 0 & \text{pro } x=0,\end{cases}$$

$$5.\ f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\tan^2 x\right) & \text{pro } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z},\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$$

$$6.\ \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\quad 7.\ \max\{x+4\arctan(\sin x),x\},\quad 8. \arcsin(\sin x).$$

Řešení viz - cvičení 22 ze ZS 19/20 na stránce
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka.

8. Nechť f je rostoucí funkce na $(-1,1)$, která má derivaci ve všech bodech $(-1,1)$. Musí platit $f'(0)>0$?

9. Nechť f je rostoucí a spojitá na $(-1,1)$. Musí pak existovat $f'(0)$?

10. Nechť f je rostoucí a spojitá na $(-1,1)$. Musí pak existovat $f'_+(0)$?

20. cvičení - l'Hospitalovo pravidlo

Nechť $a>0$ a $b>0$. Spočtěte následující limity:

$$1. \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2},\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log^a n}{n^b},\quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{an}}{n^b},\quad 4.\ \lim_{n\to\infty}|\log\frac{1}{n}|^a\frac{1}{n^b},$$

$$5. \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}{x},\quad 6.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3},$$

$$7. \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right),\quad 8.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ \frac{-1}{2};\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{-\sin x}{2x}=\frac{-1}{2}.$$

2. 0; Pokud existuje $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log^a x}{x^b}$, tak existuje i naše limita a rovná se jí.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log^a x}{x^b}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}-1}}\right)^a=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}}}\right)^a=0.$$

$$3.\ \infty;\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{a}{b}x}}{x}\right)^b=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{b}e^{\frac{a}{b}x}}{1}\right)^b=\infty.$$

$$4.\ 0;\ \lim_{x\to 0}|\log x|^a x^b=\lim_{x\to 0}\frac{|\log x|^a}{\frac{1}{x^b}}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{|\log x|}{\frac{1}{x^{\frac{b}{a}}}}\right)^a=\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-b}{a}\frac{1}{x^{\frac{b}{a}+1}}}\right)^a=0.$$

$$5.\ 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{-1}{1+(1-x)^2}=1.$$

6. $\dfrac{1}{3}$; Je potřeba použít l'Hospitala třikrát za sebou.

7. $\dfrac{-1}{3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$ a 4 krát l'Hospitalovat.

8. $e^{-\frac{1}{3}}$; Jedná se o typ 1^∞, tedy se standartně převede na $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x - x}{x^3} = \dfrac{-1}{3}$.

21. cvičení - Druhá zápočtová písemka

22. cvičení - Průběh funkce 1

Na cvičení jsme počítali průběh těchto funkcí:

$$1.|x| + \arctan(|x-1|), \quad 2.\frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}, \quad 3.|(1-x^2)e^{-x}|.$$

Řešení příkladů lze nalézt na
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/1213_analyza/PrubFR.pdf

4. Dokažte (například vyšetřením vhodného průběhu funkce), že platí:

$$\begin{aligned} e^x &\geq 1+x && \text{pro všechna } x\in \mathbf{R},\\ \sin x &\leq x && \text{pro všechna } x\in[0,\infty),\\ \cos x &\geq 1-\frac{x^2}{2} && \text{pro všechna } x\in \mathbf{R},\\ \sin x+\tan x &> x && \text{pro všechna } x\in(0,\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

5. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \text{ a } |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

6. Dokažte, že funkce je konvexní na intervalu I, právě tehdy, když

$$\forall x,y\in I,\ \forall\alpha\in(0,1):\ f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

23. cvičení - Průběh funkce 2

Na cvičení jsme počítali průběh těchto funkcí:

1. $\arctan\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$(já u tabule), 2. $(x+2)e^{1/x}$, 3. $\sin x - |\cos x|$, 4.$(x^2-3x+2)e^{|x+3|-3}$.

Řešení příkladů lze nalézt na
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/1213_analyza/PrubFR.pdf

5*. Nechť $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je konvexní. Může být f nediferencovatelná
a) na nekonečné množině?
b) ve všech bodech $\mathbf{Q}$?
c) v nespočetně mnoha bodech?

24. cvičení - Taylorův polynom 1

Nalezněte Taylorův polynom stupně k pro funkci f v bodě x_0:

$$1. \tan x, k=4, x_0=0, \quad 2. x\log x, k=3, x_0=1, \quad 3. \cos(\sin x), k=5, x_0=0.$$

Za pomoci Taylorových polynomů spočtěte:

$$4. \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}, \quad 5. \lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin x - x}, \quad 6. \lim_{n\to\infty} n^4\left(\cos\tfrac{1}{n} - e^{-\frac{1}{2n^2}}\right)$$

7. Nalezněte $k \in \mathbf{N}$, aby $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - \tan x}{x^k} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 8. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$.

Výsledky a návody:

$$1.\ x + \frac{1}{3}x^3.$$

$$2.\ x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

$$3.\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4.$$

$$4.\ \frac{1}{4!};\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

$$5.\ -6;\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1 + o(1)}{\lim_{x\to 0} -\frac{1}{3!} + o(1)}.$$

$$6.\ \frac{-1}{12};\ \text{ Pomocí Heineho převedeme na } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} \text{ a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - (1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4))}{x^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8}.$$

$$7.\ -\frac{2}{3};\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x \cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^3}.$$

$$8.\ \frac{2}{3};\ \text{Za pomoci } \frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ převedeme na } \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4}.$$

9. Nechť $k, l \in \mathbf{N}$. Dokažte, že pro $x \to 0$ platí

$$(i)\ x^k o(x^l) = o(x^{k+l}),\quad (ii)\ o(x^k)o(x^l) = o(x^{k+l})$$

$$(iii)\ o(x^k) + o(x^l) = o(x^{min\{k,l\}}),\quad (iv)\ o(x^k + o(x^l)) = o(x^k) \text{ pro } k < l.$$

25. cvičení - Taylorův polynom 2

S přesností 10^{-4} *spočtěte:*

$$a)\ \cos(0,1),\quad b)\ \log(1,01).$$

Za pomoci Taylorových polynomů spočtěte:

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3},\quad 2.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right),$$

3. Určete koeficienty $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax + x \arctan bx - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočtěte.

$$4.\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right),\quad 5.\ \lim_{x\to\infty}\left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right),$$

$$6.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \frac{1}{6}x^2}{x^3}.$$

Výsledky a návody:

$$a)\ 1 - \frac{(0,1)^2}{2};\ |R_3(0,1)| \le \frac{1}{4!}(0,1)^4,\ \text{ neboť } |\cos^{(4)}(x)| = |\cos x| \le 1.$$

$$b)\ 0,01 - \frac{(0,01)^2}{2};\ |R_2(0,01)| \le \frac{1}{3}(0,01)^3,\ \text{ neboť } |\log^{(3)}(1+x)| = 2|\tfrac{1}{(1+x)^3}| \le 2.$$

$$1.\ \frac{1}{3}.$$

$$2.\ 0;\text{Upravíme na } \frac{\sin x - x}{x\sin x}.$$

$$3.\ -\frac{1}{6};\ \text{Z } \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{(ax)^2}{2}+\frac{(ax)^4}{4!}+o(x^4)+x(bx-\frac{(bx)^3}{3}+o(x^3))-b}{x^4}=0$$

dostaneme $b=1$ a pak $a=\sqrt{2}$. Limita je pak $\dfrac{a^4}{4!}-\dfrac{b^3}{3}$.

$$4.\ \frac{1}{3};\text{Upravíme na } \frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}.$$

$$5.\ \frac{1}{2};\ \text{Převedeme na } \lim_{y\to 0}\Big(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\log\big(1+y\big)\Big).$$

6. 1; Je potřeba užít Taylor pro mocninu $p>0$ a to $(1+y)^p=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}y^k$.

7. Liché členy Taylorových polynomů v 0 od sudých funkcí jsou nulové. Sudé členy Taylorových polynomů v 0 od lichých funkcí jsou nulové.

Hinty: Použijte matematickou indukci. Derivace sudé funkce je lichá a derivace liché funkce je sudá. Každá lichá funkce je 0 v 0.

26. cvičení - Písemky z minulého roku

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1+x^2}}{x^2},\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\log(2^n+5^n)\Big(\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1}\Big)$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{(3+x)^x+(2+x)^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}},\quad 4.\ \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+\cos x}{1-\cos x}$$

$$5.\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\log n}{\log(n+1)}\Big)^{n\log(n+2)},\quad 6.\ \lim_{x\to 0+}\frac{e^x+\frac{2\log(\cos x)}{x^2}}{\sqrt{x}}$$

Určete pro které $k\in\mathbf{N}$ je následující limita vlastní a spočtěte ji

$$7.\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^{20}-(n+1)^{40}}{(n^k+2)^{10}-(n+1)^{30}}.$$

Spočtěte průběh funkce

$$8.\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{x}{1+2x}} & \text{pro } x\neq -\frac{1}{2},\\ 0 & \text{pro } x=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Výsledky a návody:

$$1.\ \frac{1}{2};\ (1+x)^x=e^{x\log(1+x)},\ \text{Jednou l'Hospital, a pak } \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

$$2.\ \frac{\log 5}{3};\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log(2^n+5^n)}{n}=\log 5 \text{ přes policajty.}$$

Zbytek upravíme podle vzorce pro rozdíl dvou odmocnin.

3. $\sqrt{6}$; Je to 1^∞, postupujeme standardně .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(3+x)^x+(2+x)^x}{2}-1}{x}=\frac{\log 3+\log 2}{2}\ \text{lze zl'Hospitalovat.}$$

$$4.\ -\frac{5}{6};\ \text{Taylorem } =\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8})-3(1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9})+(1-\frac{x^2}{2})+o(x^2)}{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}.$$

5. e^{-1}; Je to 1^∞, postupujeme standardně .

$$\lim_{n\to\infty}n\log(n+2)\Big(\frac{\log n}{\log(n+1)}-1\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\lim_{n\to\infty}-\frac{\log(1+\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}.$$

6. 0; Taylorem $\log(1+(\cos x-1))=(\cos x-1)+\dfrac{(\cos x-1)^2}{2}+o((\cos(x)-1)^2)$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1+x+o(x)+\frac{2(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}{x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+o(x)}{\sqrt{x}}.$$

7. 0 pro $k>3$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{40}+20n^{38}+..-(n^{40}+40n^{39}+..)}{n^{10k}+20n^{9k}+...-(n^{30}+30n^{29}+...)}$

8. viz https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ $\sim$ zeleny/mff/MA_1/Pisemka_00.pdf