

FROBENIOVA NORMA

DEFINICE: $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$ $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$

TOHLE JE JENOM SOUČET DRUHÝCH MOCNIN VŠECH PRVKŮ MATICE A

POŘADÍ VJAKÉN SČÍTÁNÍ JE U KONEČNÝCH SUM NEPODSTATNÉ (KOMUTATIVITA SČÍTÁNÍ)

• OZNAČ a_{i*} ... i-tý vektor matice A,
 a_{*j} ... j-tý sloupec A

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right) = \sum_{i=1}^m \|a_{i*}\|_2^2$$

TOHLE JE EUKLEIDOVSKÁ NORMA I-TÉHO ŘÁDKU MATICE A NADRUHOU

ZÁROVEŇ ALE POŘADÍ SUMACE MŮŽU PŘEHODIT

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \right) = \sum_{j=1}^m \|a_{*j}\|_2^2$$

PŘEHODIM POŘADÍ SUM

TOHLE JE EUKLEIDOVSKÁ NORMA J-TÉHO SLOUPECE MATICE A NADRUHOU

ÚLOHA 7

$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |\langle b_{*j}, \tilde{a}_{i*} \rangle|^2 \stackrel{C-SCHWARZ}{\leq} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|\tilde{a}_{i*}\|^2 \|b_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|\tilde{a}_{i*}\|^2 \sum_{j=1}^m \|b_{*j}\|^2 =$

$A \in \mathbb{C}^{n \times p}$
 $B \in \mathbb{C}^{p \times m}$

$\|\tilde{a}_{i*}\|^2$ je nezávislá na "j" a lze ji proto ze sumy vytknout ven

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p |\tilde{a}_{ik}|^2 \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p |b_{kj}|^2 \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p |a_{ik}|^2}_{\|A\|_F^2} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p |b_{kj}|^2}_{\|B\|_F^2} = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

(*) KOMPLEXNÍ SDRUŽENÍ?

• ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA JE STEJNÁ JAKO ABSOLUTNÍ HODNOTA ČÍSLA KJÉHO KOMPLEXNĚ SDRUŽENĚMU, ALIAS

ZŘEJMĚ: $\forall x \in \mathbb{C} : |x| = |\bar{x}|$

\Rightarrow TUDIŽ TO PLATÍ I PRO VEKTORY: $\forall a \in \mathbb{C}^n : \|a\|_2 = \|a^*\|_2$

PROTOŽE: $\|a\|_2 = \sqrt{\sum |a_i|^2} = \sqrt{\sum |\bar{a}_i|^2} = \|a^*\|_2$

UNITÁRNÍ TRANSFORMACE NECHĚJ EUKLEIDOVSKOU NORMU

ÚLOHA 10

$$\|UA\|_F^2 = \left\| \begin{pmatrix} |Ua_{*1}| & |Ua_{*2}| & |Ua_{*3}| & \dots & |Ua_{*m}| \end{pmatrix} \right\|_F^2 = \sum_{j=1}^m \|Ua_{*j}\|_2^2 = \sum_{j=1}^m \|a_{*j}\|_2^2 = \|A\|_F^2$$

FROBENIOVA NORMA NADRUHOU JE SOUČET EUKLEIDOVSKÝCH NOREM SLOUPEČŮ NADRUHOU