Skalární součin

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

- teoretický rámec: jak probrat nové téma
- skalární součin – zavedení
- skalární součin – aplikace

Základní schéma výkladu nové látky

1. Motivace
- nadnesení problému
- historie matematiky, „příběh“
- pokus (modelování, měření)
- formulace hypotézy

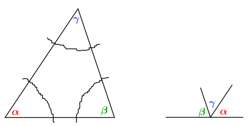
2. Odvození, důkaz („nejmatematičtější“ část)
- prozkoumání hypotézy, odvození výsledku, řešení problému
- formulace výsledku (srozumitelnost, odborná terminologie)

3. Procvičování, práce s chybou
- od jednoduššího ke složitějšímu
- včasná detekce chyb a práce s nimi
- hodnocení

4. Aplikace
- ne nutně u každého tématu (riziko triviality)
- matematika napomáhající výkladu některých jevů v reálném světě
- integrace poznatků z matematiky i z ostatních předmětů

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku — pokus

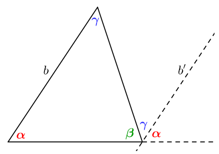
přístup: roztrhat trojúhelník — rohy k sobě poskládáme a vidíme, že...



Potíže:
- z ověření na jediném trojúhelníku závěr o všech trojúhelnících,
- nepřesnost stříhání, resp. omezená přesnost měření a vnímání lidského oka,
- nepracuje se matematicky, nerozvíjí se dostatečně logické myšlení,
- narušena návaznost na předchozí látku (probírány úhly souhlasné, střídavé a vrcholové, **nikde však toto učivo není potřeba**).

Pokud přijmeme výsledek pokusu jako základ hypotézy, budeme postaveni před úkol ověření její platnosti. Zde je nutno zapojit matematický přístup.

Součet vnitřních úhlů trojúhelníku — argumentace



- důkaz je velmi jednoduchý
- při jeho provádění se zajímavým způsobem využívá předchozí látka (úhly souhlasné a střídavé)
- rozvíjí se logické myšlení žáků
- žáci aktivní nejen při manuálním provádění pokusu (vystřihování, trhání), ale i při logických úvahách — žáci sami přicházejí na důkaz, pomoc učitele může být minimální.

Proč odvozovat a dokazovat

Rozvoj logického uvažování
Při redukci matematiky na pokusy nerozvíjíme dostatečně logické myšlení. Žák nepoznává unikátní matematický způsob uvažování a práce s matematickými objekty.

Odstranit odvozování = odstranit matematiku
Matematika „se děje“ tam, kde se matematické výsledky odvozují. Měření, stříhání, skládání či pohybování bodem po tabuli nestačí – to není matematika.

„Nepřetěžování“ vede k matematice nudné a zatěžující
Přehnaný důraz na nenáročnost matematiky v důsledku ztěžuje. Žáci nepoznávají matematické postupy, matematice hlouběji nerozumějí a nabývání dalších poznatků se jeví čím dál tím více nesmyslným a zatěžujícím. Jelikož v matematice nenabývají dostatečné jistoty, omezuje se schopnost studovat obory, v nichž se matematika podstatně využívá.

Proč odvozovat a dokazovat

Uspořádání látky
Tam, kde se výsledky soustavně odvozují, je látka přirozeně uspořádána do soustavy, kdy z jednodušších výsledků plynou závěry složitější. Mnohé poznatky pak nelze jen tak snadno vynechat, u každého z nich je také zřejmý jeho účel, má v probíraném tématu své místo.
Při samotném odvozování se také opakuje, procvičuje a aplikuje předchozí látka.

Neutváří se pouhý formální systém
Odvozování jsou vedena snahou o názornou matematickou argumentaci, ne o pouhé ověření faktů či vytvoření dokonalého formálního systému. Slouží tedy k hlubšímu vysvětlení jednotlivých tvrzení.

Vhodná aktivita žáků
Odvozování není přijímáno pasivně, žáci jej tvoří s pomocí učitele, který žákům předkládá dílčí, jimi zvládnutelné úkoly.
Důkazy, jež jsou předmětem pouhého memorování, ztrácejí svůj význam.

Proč odvozovat a dokazovat

Přehled o celku, vědomí vyššího cíle
Žák má přehled o tom, kam zapadá odvozovaný výsledek, má před očima celkový obraz, který se při vyučování postupně vytváří.

Hypotéza $\neq$ věta
Pokus může vyústit do formulace hypotézy, avšak výsledkem odvozování je věta. Na základě jednoho či několika případů nelze činit obecné závěry (z pokusu s jedním trojúhelníkem nelze činit závěr o všech trojúhelnících).
Navíc při práci s fyzickým modelem vstupují do hry nepřesnosti samotného modelu (přesnost stříhání, úsečky či kružnice vyrobeny z materiálu, který má nenulovou tloušťku, ...) a nepřesnost měření.

Proč důkazy (odvození, řešení problémů)

- při odvozování opakuji předchozí látku
- důkazy (odvození, řešení problémů) — to je matematika
- měřit, stříhat, jezdit prstem po tabuli nestačí – to ještě není matematika
- důkazy uspořádají látku (co kdy probírat)

některé současné učebnice zcela odstraňují matematiku

různé reformy těží z neférové kritiky „klasické“ výuky, za kterou chybně považují výuku plnou vzorců sdělených „shůry“
sdělovat vzorce, vyhledávat je v tabulkách a dosazovat do nich – to není výuka matematiky, ale špatná výuka, která se míjí základním cílem vzdělávání v matematice

Shrnutí

- na ZŠ i SŠ:
názorná zdůvodnění, vysvětlení (ne jen formální ověření pravdivosti) jsou integrální součástí výuky

- pokus nenahrazuje odvození, jinak z hodin matematiky odstraníme matematiku

- žáci by na vyšším stupni neměli být příliš překvapeni, co že to ta matematika vlastně je

Skalární součin

Skalární součin

Skalární součin, který teď zavedeme, je velmi důležitý. Jeho názorný význam ukážeme později.

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo

$$u_1v_1 + u_2v_2.$$

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ označujeme (podobně jako při násobení čísel) buď $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, nebo jen $\boldsymbol{uv}$. Místo $\boldsymbol{uu}$ budeme většinou psát $\boldsymbol{u}^2$. V rovině platí $\boldsymbol{u}^2 = u_1^2 + u_2^2$ a v prostoru $\boldsymbol{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. Platí tedy i

$$\boldsymbol{u}^2 = |\boldsymbol{u}|^2.$$

Skalární součin

Dva vektory je možné také násobit. Přitom je potřeba mít na paměti, že součinů dvou vektorů je více, a proto budeme důsledně používat přívlastky, zde budeme mluvit o skalárním součinu vektorů.

SKALÁRNÍ SOUČIN

SKALÁRNÍ SOUČIN dvou vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2)$ je reálné číslo $a_1b_1 + a_2b_2$.

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ se označuje $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Je-li jeden z vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ nulový, platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Určete skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (-4; 5)$, $\boldsymbol{v} = (3; 7)$.

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 7$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 23$

Pokud máme vektory zadané souřadnicemi, stačí pouze dosadit do vzorce pro výpočet skalárního součinu.

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (-1; 5)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; 4)$ je 33. Určete chybějící souřadnici vektoru $\boldsymbol{v}$.

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$
$33 = (-1) \cdot v_1 + 5 \cdot 4$
$33 = -v_1 + 20$
$v_1 = -13$

Využijeme vzorec pro výpočet skalárního součinu a vyřešíme lineární rovnici o jedné neznámé.

Skalární součin úzce souvisí s výpočtem odchylky dvou vektorů.

Kam dál?

Pokud bychom pojem skalárního součinu chtěli zavést skutečně pořádně, museli bychom říci, že skalární součin je zobrazení. Tento pojem je pro nás příliš obecný, ale na druhou stranu některá zobrazení dobře znáte.

- Mezi zobrazení patří reálné funkce jedné reálné proměnné (viz 4. a 5. díl této učebnicové řady).
- Jiným příkladem zobrazení jsou shodnosti a podobnosti (viz 3. díl, Planimetrie, s. 98–129).
- Další zobrazení se nazývají operace a patří sem třeba sčítání a násobení reálných čísel (viz 1. díl, Základní poznatky).

Zamyslete se!

Jedna z vlastností skalárního součinu říká, že pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a libovolné reálné číslo k platí:

$(k \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

V této formulce je čtyřikrát použitý symbol tečky, ale ve třech různých významech:

- Červené tečky označují skalární součin.
- Zelená tečka označuje násobek vektoru, tedy násobení reálného čísla a vektoru.
- Modrá tečka je součin dvou reálných čísel.

Skalární součin

Základní otázka:

Jsou-li v rovině dány dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, proč definovat a zkoumat následující výraz?

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2}$$

Pozor: nechceme skalární součin.

Skalární součin

Základní otázka:

Jsou-li v rovině dány dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, proč definovat a zkoumat následující výraz?

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2}$$

Pozor: nechceme skalární součin.

Skalární součin

Chceme budovat metrickou geometrii analytickou metodou, pomocí souřadnic.

Základní úlohy metrické geometrie:

1. vzdálenost dvou bodů
2. úhel dvou vektorů

Skalární součin

Velikost vektoru – Pýthagorova věta:

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ – kosinová věta:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \quad - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

$$(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2) = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \quad - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi}$$

označme tedy výraz na levé straně

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$$

Skalární součin — norma

Označení je užitečné – lze využít nejen při výpočtech odchylky, ale i pro zápis normy vektoru.

Je-li ve vztahu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$\vec{u} = \vec{v}$, dostáváme

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2,$$

což je přímo druhá mocnina normy vektoru $\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$

Lze tedy psát

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

Skalární součin — proč součin (distributivní zákon)

Proč $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ nazývat součin?

Proč operaci
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$
označovat pomocí symbolu „·“ a nazývat ji *součin*?

Sčítání vektorů už je definováno.

Součin vektorů by měl být s tímto sčítáním „kompatibilní“,
tj. měl by platit **distributivní zákon**
$$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n:\quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$
$$(u_1,u_2)\cdot(v_1+w_1, v_2+w_2) = u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2)$$
$$= u_1v_1+u_2v_2 \quad + \quad u_1w_1+u_2w_2 = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$
Distributivní zákon platí, *součin* je tedy vhodný název.

Skalární součin — proč součin (násobení matic)

Proč $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ nazývat součin?

Skalární součin lze napsat pomocí součinu matic:
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix}}$$
Dostáváme tak další argument, že *součin* je vhodný název.

Skalární součin — proč skalární

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$
Součinem dvou vektorů není vektor, ale číslo (skalár).
lat. *scālae, -ārum, f.* — žebřík, schody

Tento součin tedy **není operací** na množině vektorů.

Na vektorovém prostoru však existuje součin, který je operací, výsledkem je tedy vektor. Běžně se užívá, je třeba jej tedy od právě definovaného součinu odlišit — nazývá se *vektorový součin*.

Definice: Číslo
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$
přiřazené dvěma vektorům $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ se nazývá *skalární součin* vektorů $\vec{u},\vec{v}$.

Lze se dále zabývat tím, vzhledem k jaké bázi jsou souřadnice $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$. Zde předpokládáme *kartézskou bázi.*

Skalární součin — kolmost (podobnost)

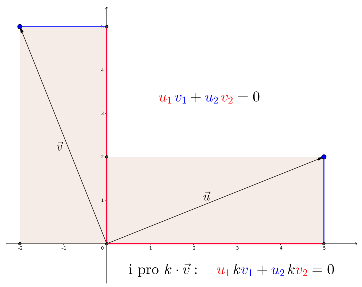
Kdy je $\vec{u}\perp\vec{v}$?

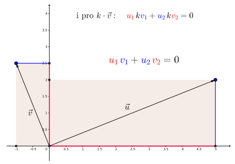
1. zvolme $\varphi = 90^\circ$ ve vztahu $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\varphi$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \text{tj.} \qquad u_1v_1+u_2v_2 = 0$$

2. přímo z podobnosti trojúhelníků:
$$\frac{|u_2|}{|u_1|} = \frac{|v_1|}{|v_2|}$$
tj.
$$|u_1||v_1| = |u_2||v_2|$$
je třeba ohlídat kvadranty (tj. znaménka)

(mimochodem: je-li $|u_2| = |v_2|$, dostáváme Eukleidovu větu o výšce: $|u_1||v_1| = |u_2|^2$)

Skalární součin — kolmost





Skalární součin — kolmost (podobnost)

znaménka

$$|u_1||v_1| = |u_2||v_2|\,,$$
tj. kolmost nastává v případě $|u_1||v_1| - |u_2||v_2| = 0$
pracovali jsme však s délkami stran, ne se souřadnicemi

vektor (v_1,v_2) je „o kvadrant dále“ než vektor (u_1,u_2),
proto má právě jedna z jeho souřadnic změněno znaménko, tj.
$$u_1v_1+u_2v_2 = 0$$

Skalární součin — kolmost (úhlopříčky obdélníku)

Rovnoběžník, jehož úhlopříčky se rovnají, je obdélníkem.

Je-li $\vec{u}\perp\vec{v}$, tak doplněním na rovnoběžník dostáváme obdélník.
Délky obou jeho úhlopříček se rovnají:
$$\boxed{\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|}$$
Umocněním na druhou a užitím rovnosti $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$ dostáváme
$$\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\vec{u}\cdot\vec{v}$$
tj. nutně
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$
Argumentace platí i opačným směrem.

Skalární součin — kolmost (Pýthagorova věta)

Triviální důsledek kosinové věty, $\varphi = 90^\circ$.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$$
Užitím rovnosti $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$ dostáváme
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Historie

komplexní čísla

počátky vektorového počtu: komplexní čísla, pokusy o zobecnění
$$z = a_1 + a_2\mathrm{i} \qquad w = b_1 + b_2\mathrm{i}$$
$$\bar{z}\cdot w = (a_1 - a_2\mathrm{i})\cdot(b_1+b_2\mathrm{i}) = (a_1b_1 + a_2b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 - a_2b_1)$$
vidíme tedy:
$$\mathrm{Re}(\bar{z}\cdot w) = a_1b_1 + a_2b_2 \qquad \mathrm{Im}(\bar{z}\cdot w) = a_1b_2 - a_2b_1$$
$$\mathrm{Re}(\bar{z}\cdot z) = \|z\|^2 \qquad \mathrm{Im}(\bar{z}\cdot w) = S_{\text{rovnob}}$$

Historie
komplexní čísla

počátky vektorového počtu: komplexní čísla, pokusy o zobecnění

$$z = a_1 + a_2\mathrm{i} \qquad w = b_1 + b_2\mathrm{i}$$
$$\bar{z} \cdot w = (a_1 - a_2\mathrm{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

vidíme tedy:

$$\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad \mathrm{Im}(\bar{z} \cdot w) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot z) = \|z\|^2 \qquad \mathrm{Im}(\bar{z} \cdot w) = S_{\text{rovnob}}$$

Historie
hyperkomplexní čísla

počátky vektorového počtu: komplexní čísla, pokusy o zobecnění

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)
irský matematik (Dublin)
od 3 let jej vychovával strýc
zájem o jazyky
zázračný počtář Zerah Colburn (1813) → matematika
mechanika, algebra

Hamilton se pokoušel o zobecnění:
$z = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j}$ (neexistuje)
$z = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$ kvaterniony (1843)

Historie
kvaterniony — 16. října 1843

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1}$$

násobení není komutativní

Historie
$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$

$$z = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k} \qquad w = b_1 + b_2\mathrm{i} + b_3\mathrm{j} + b_4\mathrm{k}$$

$$\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot w) = (a_1 - a_2\mathrm{i} - a_3\mathrm{j} - a_4\mathrm{k}) \cdot (b_1 + b_2\mathrm{i} + b_3\mathrm{j} + b_4\mathrm{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$\mathrm{Re}(\bar{z} \cdot z) = \|z\|^2$$

Vzdálenost dvou bodů na ploše
plocha $X = \vec{p}(u_1, u_2)$ křivka $X = \vec{p}(u_1(t), u_2(t))$

délka křivky $\vec{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\vec{c}\,'(t) \cdot \vec{c}\,'(t)}\,\mathrm{d}t$$

tj. délka křivky na ploše:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{p}(u_1(t), u_2(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{p}(u_1(t), u_2(t))}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\mathrm{d}u_1^2 + 2\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\mathrm{d}u_2^2}$$

Vzdálenost dvou bodů na ploše

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\mathrm{d}u_1^2 + 2\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_1}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_2}\mathrm{d}u_2^2}$$

Označíme-li

$$g_{ij} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_i}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}u_j}\,,$$

můžeme psát

$$\boxed{I = g_{11}\,\mathrm{d}u_1^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 + g_{22}\,\mathrm{d}u_2^2\,.}$$

tato kvadratická forma se nazývá *1. základní forma plochy*

Aplikace skalárního součinu

Skalární součin — rovnice nadroviny
Rovnice přímky: $p: ax + by + c = 0$

- „kouzlo:“ vektor $\vec{n} = (a, b)$ je na přímku p kolmý, naz. jej *normálový vektor*

- lépe (klasicky) — z parametrického vyjádření vyloučíme parametr:

$$X = A + t\vec{u}$$
$$x = a_1 + tu_1\,, \quad y = a_2 + tu_2$$
$$u_2 x = u_2 a_1 + t u_1 u_2\,, \quad -u_1 y = -u_1 a_2 - t u_1 u_2$$
$$u_2 x - u_1 y = u_2 a_1 - u_1 a_2$$

Tj. označíme-li vektor koeficientů u x a y (tzv. normálový vektor)

$$\vec{n} = (a, b) = (u_2, -u_1)\,,$$

vidíme, že směrový a normálový vektor jsou na sebe kolmé:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (u_1, u_2) \cdot (a, b) = (u_1, u_2) \cdot (u_2, -u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0\,.$$

Skalární součin — rovnice nadroviny
kolmost vektoru koeficientů (a, b) na přímku $p: ax + by + c = 0$
lze nahlédnout přímo:

- obecná rovnice přímky p, body $X, Q \in p$:

$$\vec{n} \perp (X - Q) \quad \text{tj.} \quad \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$$

(všechny vektory $(X - Q)$ kolmé na $\vec{n}$, tj. dim = $n - 1$, prochází bodem Q)
v souřadnicích:

$$(a, b) \cdot (x - q_1, y - q_2) = 0 \quad \text{tj.} \quad ax + by + (-aq_1 - bq_2) = 0$$

- nebo (mám-li obecnou rovnici): „$+c$“ je pouhý posun, nemá vliv na sklon přímky, při zkoumání odchylek se tedy stačí omezit na rovnici

$$ax + by = 0\,,$$

to je však kolmost:

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0 \quad \text{neboli} \quad \vec{n} \perp \vec{x} \quad \text{neboli} \quad \vec{n} \perp (X - O)$$

- u roviny $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ stejný argument: $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$

Rovnice nadroviny jednoduše

všechny vektory $(X-Q)$ ležící v nadrovině jsou kolmé na $\vec{n}$

$$\vec{n} \perp (X-Q) \quad \text{tj.} \quad \boxed{\vec{n}\cdot(X-Q)=0}$$

v souřadnicích:

$$(a,b)\cdot(x-q_1, y-q_2)=0 \quad \text{tj.} \quad ax+by+(-aq_1-bq_2)=0$$

Skalární součin — interpretace

geometrická interpretace a její důsledky

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\varphi$$

poskytuje interpretaci skalárního součinu:

- $\|\vec{v}\|\cos\varphi$ je velikost projekce vektoru $\vec{v}$ do *směru* vektoru $\vec{u}$ (znaménko naznačuje orientaci)
- krát $\|\vec{u}\|$

- je-li vektor $\vec{u}$ **jednotkový**, tak $\vec{u}\cdot\vec{v}$ představuje *(orientovanou)* ***velikost projekce*** $\vec{v}$ ***do směru*** $\vec{u}$

- **kolmost** – velikost projekce je nulová

- aplikace interpretace skal. součinu — **vzdálenost bodu od nadroviny**

Skalární součin — vzdálenost bodu od nadroviny

Obecně: vzdálenost bodu A od nadroviny $\alpha : \vec{n}\cdot(X-Q)=0$

$$d(A,\alpha)=d(A,A')=\left|\text{proj}\left[(A-Q)\text{ do směru }\vec{n}\right]\right|=\left|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\cdot(A-Q)\right|$$

- **v rovině:** $A=[a_1,a_2]$, přímka $\alpha : (a,b)\cdot(x-q_1,y-q_2)=0$
tj. $\alpha : ax+by+c=0$

$$d(A,\alpha)=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\cdot(A-Q)=\frac{|aa_1+ba_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- **v prostoru:** $A=[a_1,a_2,a_3]$, rovina $\alpha : (a,b,c)\cdot(x-q_1,y-q_2,z-q_3)=0$
tj. $\alpha : ax+by+cz+d=0$

$$d(A,\alpha)=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\cdot(A-Q)=\frac{|aa_1+ba_2+ca_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Změna báze

skalární součin úzce souvisí se změnou báze

$$\vec{u}_K=B\,\vec{u}_B=\begin{pmatrix}\vec{e_1}_B^{\,T}B^TB\,\vec{u}_B\\ \vec{e_2}_B^{\,T}B^TB\,\vec{u}_B\end{pmatrix}$$

$$\vec{e_1}_B^{\,T}B^T=\vec{e_1}_K^{\,T}=(1,0) \qquad B\,\vec{u}_B=\vec{u}_K$$

$\vec{e_i}_B$ je i-tý sloupec matice B^{-1}

$$B\,\vec{u}_B=(B^T)^{-1}B^T\cdot B\,\vec{u}_B=\begin{pmatrix}\vec{e_1}_B^{\,T}\\ \vec{e_2}_B^{\,T}\end{pmatrix}B^TB\,\vec{u}_B=\begin{pmatrix}\vec{e_1}_B^{\,T}B^TB\,\vec{u}_B\\ \vec{e_2}_B^{\,T}B^TB\,\vec{u}_B\end{pmatrix}$$

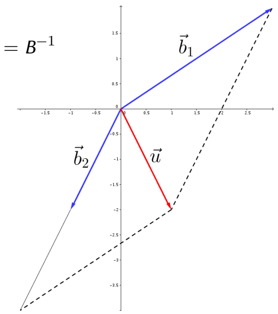
$$\vec{u}_B=K\,\vec{u}_K=\begin{pmatrix}\vec{b_1}_K^{\,T}K^TK\,\vec{u}_K\\ \vec{b_2}_K^{\,T}K^TK\,\vec{u}_K\end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \quad K=B^{-1}$$

Změna báze

Ilustrace

$$\vec{u}_B=K\,\vec{u}_K=\begin{pmatrix}\vec{b_1}_K^{\,T}K^TK\,\vec{u}_K\\ \vec{b_2}_K^{\,T}K^TK\,\vec{u}_K\end{pmatrix}, \qquad \text{kde} \quad K=B^{-1}$$

Skalární součiny vektoru $\vec{u}$ s bázovými vektory **jsou souřadnice** vektoru $\vec{u}$ vzhledem k této bázi.



Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

2D: Ortogonalizace báze $\{\vec{u},\vec{v}\}\longrightarrow\{\vec{u}_G,\vec{v}_G\}$:

$$\vec{u}_G=\vec{u}$$

$$\vec{v}_G=\vec{v}-c\,\vec{u}_G\,, \qquad c=\frac{\vec{u}_G\cdot\vec{v}}{\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G}$$

3D: Ortogonalizace báze $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\longrightarrow\{\vec{u}_G,\vec{v}_G,\vec{w}_G\}$:

$$\vec{u}_G=\vec{u}$$

$$\vec{v}_G=\vec{v}-c\,\vec{u}_G\,, \qquad c=\frac{\vec{u}_G\cdot\vec{v}}{\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G}$$

$$\vec{w}_G=\vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G\,, \qquad c_1=\frac{\vec{u}_G\cdot\vec{w}}{\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G}\,, \quad c_2=\frac{\vec{v}_G\cdot\vec{w}}{\vec{v}_G\cdot\vec{v}_G}$$

Každý vektor ortogonalizované báze lze vyjádřit jako lineární kombinaci předchozích prvků této OG báze.

Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

Interpretace Fourierových koeficientů

Ortogonalizace báze $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$:

$$\vec{u}_G=\vec{u}$$

$$\vec{v}_G=\vec{v}-c\,\vec{u}_G=\vec{v}-\frac{\vec{u}_G\cdot\vec{v}}{\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G}\,\vec{u}_G=\vec{v}-\left(\frac{\vec{u}_G}{\|\vec{u}_G\|}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{u}_G}{\|\vec{u}_G\|}$$

skalární součin $\vec{v}$ s jednotkovým vektorem je přímo velikost projekce:

$$\boxed{\vec{v}_G=\vec{v}-\text{proj}\,[\vec{v}\text{ do směru }\vec{u}_G]}$$

Odečteme-li od $\vec{v}$ vektor jeho projekce do $\vec{u}_G$, získáme vektor $\vec{v}_G$, jehož projekce do $\vec{u}_G$ je nulová, tj. $\vec{u}_G\perp\vec{v}_G$

Podobně s dalším vektorem:

$$\vec{w}_G=\vec{w}-\frac{\vec{u}_G\cdot\vec{w}}{\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G}\,\vec{u}_G-\frac{\vec{v}_G\cdot\vec{w}}{\vec{v}_G\cdot\vec{v}_G}\,\vec{v}_G$$
$$=\vec{w}-\text{proj}\,[\vec{w}\text{ do směru }\vec{u}_G]-\text{proj}\,[\vec{w}\text{ do směru }\vec{v}_G]$$

Gramův determinant

determinant „skalárních součinů“

$$\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}\end{vmatrix}=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-\Big(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\varphi(\vec{u},\vec{v})\Big)^2$$

$$=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2\varphi(\vec{u},\vec{v}))=\Big(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\varphi(\vec{u},\vec{v})\Big)^2=(S_{\text{rovnoběžník}})^2$$

tj.

$$S_{\text{rovnoběžník}}=\sqrt{\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}\end{vmatrix}}$$

Gramův determinant — 2D

Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces báze $\{\vec{u},\vec{v}\}$:

$$\vec{u}_G=\vec{u} \qquad \vec{v}_G=\vec{v}-c\,\vec{u}_G\,, \quad c=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

od 2. sloupce odečteme c-násobek 1. sloupce:

$$\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}-c\vec{u}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}-c\vec{v}\cdot\vec{u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot(\vec{v}-c\vec{u})\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot(\vec{v}-c\vec{u})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}_G\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}_G\end{vmatrix}$$

a od 2. řádku odečteme c-násobek 1. řádku:

$$=\begin{vmatrix}\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{v}_G\\ \vec{v}\cdot\vec{u}_G & \vec{v}\cdot\vec{v}_G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{v}_G\\ (\vec{v}-c\vec{u}_G)\cdot\vec{u}_G & (\vec{v}-c\vec{u}_G)\cdot\vec{v}_G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{v}_G\\ \vec{v}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G\end{vmatrix}$$

tj. (s využitím ortogonality $\vec{u}_G\perp\vec{v}_G$):

$$\begin{vmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & 0\\ 0 & \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G\end{vmatrix}$$

Gramův determinant — 2D

$$\begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} \\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & 0 \\ 0 & \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G \end{vmatrix}$$

$$\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}_G\|^2\,\|\vec{v}_G\|^2$$

Rovnost je skutečně splněna, protože

$$\vec{v}_G\cdot\vec{v}_G = (\vec{v}-c\vec{u})\cdot(\vec{v}-c\vec{u}) = \vec{v}\cdot\vec{v} - 2c\,\vec{u}\cdot\vec{v} + c^2\,\vec{u}\cdot\vec{u}$$

$$= \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)^2\,\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{v} - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\,,$$

tudíž

$$(\vec{u}_G\cdot\vec{u}_G)(\vec{v}_G\cdot\vec{v}_G) = \|\vec{u}\|^2\left(\|\vec{v}\|^2 - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2}\right) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2\,.$$

Gramův determinant

Gramův determinant — 3D

1. krok — operace se sloupci (v 2. složce budou OG vektory)

$$\vec{u}_G = \vec{u} \qquad \vec{v}_G = \vec{v} - c\,\vec{u}_G \qquad \vec{w}_G = \vec{w} - c_1\vec{u}_G - c_2\vec{v}_G$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{w} \\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w} \\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} & \vec{w}\cdot\vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} - c\,\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{w} \\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} - c\,\vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{w} \\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} - c\,\vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{w} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot(\vec{v}-c\,\vec{u}) & \vec{u}\cdot\vec{w} \\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot(\vec{v}-c\,\vec{u}) & \vec{v}\cdot\vec{w} \\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot(\vec{v}-c\,\vec{u}) & \vec{w}\cdot\vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u}_G & \vec{u}\cdot\vec{v}_G & \vec{u}\cdot\vec{w} \\ \vec{v}\cdot\vec{u}_G & \vec{v}\cdot\vec{v}_G & \vec{v}\cdot\vec{w} \\ \vec{w}\cdot\vec{u}_G & \vec{w}\cdot\vec{v}_G & \vec{w}\cdot\vec{w} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u}_G & \vec{u}\cdot\vec{v}_G & \vec{u}\cdot(\vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G) \\ \vec{v}\cdot\vec{u}_G & \vec{v}\cdot\vec{v}_G & \vec{v}\cdot(\vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G) \\ \vec{w}\cdot\vec{u}_G & \vec{w}\cdot\vec{v}_G & \vec{w}\cdot(\vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{u}_G & \vec{u}\cdot\vec{v}_G & \vec{u}\cdot\vec{w}_G \\ \vec{v}\cdot\vec{u}_G & \vec{v}\cdot\vec{v}_G & \vec{v}\cdot\vec{w}_G \\ \vec{w}\cdot\vec{u}_G & \vec{w}\cdot\vec{v}_G & \vec{w}\cdot\vec{w}_G \end{vmatrix}$$

Gramův determinant

Gramův determinant — 3D

2. krok — operace s řádky (také v 1. složce budou OG vektory)

$$\vec{u}_G = \vec{u} \qquad \vec{v}_G = \vec{v} - c\,\vec{u}_G \qquad \vec{w}_G = \vec{w} - c_1\vec{u}_G - c_2\vec{v}_G$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{v}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{w}_G \\ \vec{v}\cdot\vec{u}_G & \vec{v}\cdot\vec{v}_G & \vec{v}\cdot\vec{w}_G \\ \vec{w}\cdot\vec{u}_G & \vec{w}\cdot\vec{v}_G & \vec{w}\cdot\vec{w}_G \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{v}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{w}_G \\ (\vec{v}-c\,\vec{u}_G)\cdot\vec{u}_G & (\vec{v}-c\,\vec{u}_G)\cdot\vec{v}_G & (\vec{v}-c\,\vec{u}_G)\cdot\vec{w}_G \\ (\vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G)\cdot\vec{u}_G & (\vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G)\cdot\vec{v}_G & \vec{w}-c_1\vec{u}_G-c_2\vec{v}_G\cdot\vec{w}_G \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{v}_G & \vec{u}_G\cdot\vec{w}_G \\ \vec{v}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G & \vec{v}_G\cdot\vec{w}_G \\ \vec{w}_G\cdot\vec{u}_G & \vec{w}_G\cdot\vec{v}_G & \vec{w}_G\cdot\vec{w}_G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u}_G\cdot\vec{u}_G & 0 & 0 \\ 0 & \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G & 0 \\ 0 & 0 & \vec{w}_G\cdot\vec{w}_G \end{vmatrix}$$

$$= \|\vec{u}_G\|^2\,\|\vec{v}_G\|^2\,\|\vec{w}_G\|^2 = (V_{\text{rovnoběžnostěn}})^2$$