

MATEMATIKA PRAŽSKÉHO ORLOJE

ZDENĚK HALAS

*Orloj ten jest rozprávky a chvály hodný
ve všech krajinách nad jiné všechny veliké orloje na světě, ...*

Jan Táborský, *Zpráva o orloji staroměstském*, 1570

V rámci tohoto stručného textu se podíváme na některé matematické principy, na nichž je založeno fungování pražského orloje. Věnovat se budeme jednak konstrukci astronomického ciferníku (a co všechno z něho lze vyčíst), jednak také přímo ozubeným kolům, která všemu dávají řád. Potřeba budeme jen základní planimetrii a počítání se zlomky.

1 Úvodem – k historii pražského orloje

Pražský orloj není třeba představovat: každý si jistě vybaví jeho charakteristický astronomický ciferník, Mánesovo kalendárium, figurky, apoštoly, figurální výzdobu kameníků Parlérovy hutě.

Cílem tohoto textu není zabývat se obsáhlou historií orloje či jeho výzdobou, spíše se podíváme na matematické principy, na nichž je jeho konstrukce založena. Podrobnější informace o pražském orloji lze nalézt na rozsáhlých stránkách [web], ve speciálních číslech časopisů [P2009] a [P2013] věnovaných pražskému orloji či v knížce [Žá]. Připomeňme tedy na úvod jen nejzákladnější historická data a jména.

Vznik orloje se datuje do období kolem roku 1410 (první známá zmínka o orloji je z 9. října 1410). Zhotovitelem byl Mikuláš z Kadaně, královský hodinář. Není vyloučeno, že potřebné propočty provedl Jan Šindel, profesor Pražské univerzity; dobrý mistr hodinář by však mohl být schopen všechny přípravné práce včetně konstrukce astronomického ciferníku a návrhu ozubených kol provést sám.

Nejslavnějším orlojníkem byl Jan Táborský z Klokotské Hory, který sepsal v roce 1570 zprávu o orloji. Táborský vyslovil domněnku, že orloj sestrojil kolem roku 1490 Mistr Hanuš (Jan Růže, skutečně působil na orloji, bydlel nedaleko v Jilské ulici); známá je také pověst o jeho oslepení, aby nemohl sestrojit podobný orloj jinde, a to díky zpracování Aloise Jiráska ve *Starých pověstech českých*. Výzkumy však potvrdily dřívější datum vzniku orloje i Mikuláše z Kadaně jako zhotovitele.

Orloj prošel mnoha opravami. Jednou z nejslavnějších byla velká oprava probíhající v 60. letech 19. století (po opravě byl orloj spuštěn o půlnoci z 31. 12. 1865 na 1. 1. 1866). Psal o ní velmi zasvěceně (včetně rozboru skutečně odborných otázek) i pražský archivář Karel Jaromír Erben (autor *Kytice*), sám byl ostatně členem komise pro obnovení pražského orloje. Tato oprava se zapsala do historie národního obrození, orloj začal řídit přesný Božkův chronometr, v průběhu roku 1866 (tedy dodatečně) bylo odhaleno kalendárium Josefa Máneše.

V den konce 2. světové války radnice vyhořela a orloj byl poškozen. Jen díky obětavé práci bratrů Veseckých byl orloj zachráněn a po třech letech oprav (tj. 1948) znovu spuštěn. Čtyřiadvacetník – vnější otočný prstenec – byl uveden do chodu dodatečně v roce 1957. Generální oprava stroje pak proběhla v roce 1963. Další opravou, týkající se zejména vnějšku orloje (i radnice), orloj prošel v roce 1979; tehdy byla také opravena chyba, která byla na astronomickém ciferníku velmi dobře patrná a která vznikla při opravě v roce 1948: kružnice astronomického soumraku byla bohužel chybně vyznačena, byla příliš malá a měla i chybně určený střed. Tento stav je patrný na následujícím obrázku. Kružnice astronomického soumraku je hraniční kružnicí černého kruhu ve spodní části ciferníku. Správný stav je na všech dalších obrázcích astronomického ciferníku.



Ciferník orloje před opravou v roce 1979 s chybně vyznačenou kružnicí astronomického soumraku.

Zatím poslední oprava v roce 2018 přinesla několik zásadních změn. Elektrický pohon z roku 1948 byl nahrazen původním mechanismem, konopnými lany navíjenými na dřevěné lanové bubny. Zeměkoule ve středu orloje, na níž byla zřetelně vidět Amerika i Austrálie (kontinenty v době vzniku orloje neznámé) byla nahrazena zlatou zeměpisnou sítí bez vyznačení kontinentů. Chybné umístění místa, kde je na Zemi Praha, do středu astronomického ciferníku, však zůstalo; vše se tak neotáčí (zdánlivě) kolem zemské osy, ale chybně kolem Prahy.

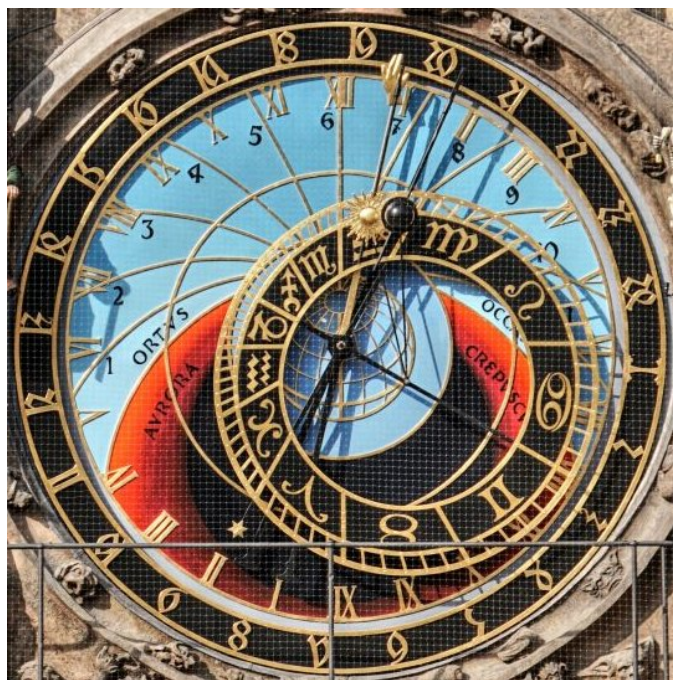
Tato oprava přinesla (jako obvykle) i jisté kontroverze. Týkají se zejména barev zvolených na astronomickém ciferníku. Dřívější pěkné a decentní barvy byly nahrazeny barvami křiklavějšími. Příjemně modrá obloha s decentním přechodem u východu a západu Slunce se změnila na oblohu výrazně bleděmodrou. Příjemně oranžová oblast soumraku je nyní sytě červená. Navíc se na ní objevil šedě naznačený občanský západ Slunce s postupným ztmavováním směrem ke kružnici astronomického soumraku (její vnitřek tradičně vybarven černě). Tato úprava se nesesetkala se souhlasem části odborné veřejnosti, a tak byla následujícího roku (2019) odstraněna. V reportáži, kterou odvysílala Česká televize v květnu 2019 se hovořilo o tom, že je deska špatně namalována, stav omalby se srovnával s tím, jako by někdo rozmazal čáry na slunečních hodinách; magistrát hovořil o tom, že je běžné, že jsou barvy dostatečně zřetelné až po několika úpravách. Nejvíce asi vadilo, že kružnice astronomického soumraku není dostatečně zřetelná. Oblast mezi obzorem a kružnicí astronomického soumraku je tedy nyní jednobarevná – sytě červená.

Přes všechny peripetie obsahuje staroměstský orloj asi tři čtvrtiny starých původních dílů, je tedy nejzachovalejším na světě.

Pražský orloj můžeme obdivovat nejen přímo, na Staroměstském náměstí, ale také kdykoli na počítači. Existuje celá řada simulátorů, velmi pěkně graficky zpracovaný je například widget dostupný v Google Play.¹

V následujícím textu pojednáme o tom, co orloj ukazuje; odtud vypočítáme počty zubů příslušných ozubených kol a ukážeme, jak je astronomický ciferník zkonstruován geometricky. Budeme pro stručnost hovořit o orloji, na mysli však budeme mít jen astronomický ciferník a stroj staroměstského orloje, který jej řídí.

¹ <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.madr.orloj&hl=cs>
V Google Play stačí vyhledat „Orloj MadrSoft“.



Astronomický ciferník orloje po opravě v r. 2018 (8. října 2018).

2 Co orloj ukazuje

Kolik je hodin?

Předně musíme upozornit, že orloj jde celoročně podle „zimního“ času (správně střeoevropského času), chceme-li tedy zjistit „obvyklý“ čas, musíme v období letního času přičíst k údajům ukazovaným zlatou rukou na stupnici s římskými číslicemi jednu hodinu.

Co a jak se na orloji otáčí

Na orloji se pohybují dvě rafie (neboli „ručičky“, obě jsou protažené i na druhou stranu) nesoucí Slunce a Měsíc, zvířetník (neboli zodiak) a čtyřladvacetník (vnější černý prstenec s gotickými číslicemi).

- Rafie Slunce: na ní je zlatý symbol Slunce a na konci zlatá ruka. Slunce obíhá ve směru hodinových ručiček kolem středu ciferníku (jeden oběh trvá 24 hodin, tj. jeden střední sluneční den).
- Rafie Měsíce: otáčí se kolem středu ciferníku a na ní je symbol Měsíce v podobě kuličky, která je z poloviny stříbrná a z po-

loviny černá. Měsíc obíhá po zvířetníku proti směru hodinových ručiček, jeden oběh po zvířetníku vykoná za synodický měsíc (od úplňku k úplňku, přibližně 29 a půl dne, tj. za den urazí přibližně 0,4 jednoho znamení neboli 2,44 zlatých dílků na zvířetníku). V průběhu jednoho dne se zdá, jako by zvířetník s Měsícem obíhaly téměř stejnou rychlostí, je však patrné, že Měsíc se pohybuje rychleji, čímž vzniká žádoucí dojem oběhu Měsíce po zvířetníku. Samotná stříbrná (z poloviny začerněná) měsíční kulička se navíc otáčí kolem své osy jednou za synodický měsíc, čímž názorně ukazuje fáze Měsíce.

- Zvířetník (neboli zodiak): je to kruhový prstenec se znameními zvěrokruhu umístěný na orloji excentricky, otáčí se kolem středu orloje (nikoli tedy kolem svého středu) ve směru hodinových ručiček. Představuje ekliptiku². Jeden oběh vykoná za hvězdný den (23 hodin 56 minut 4 sekundy), pohybuje se tedy nepatrně rychleji než Slunce. Rozdíl v rychlostech otáčení činí (jak je patrné z délky hvězdného dne) jeden oběh za rok. V průběhu roku tedy Slunce vykoná po zvířetníku jeden oběh proti směru hodinových ručiček. Při pozorování v průběhu jednoho dne vzniká dojem, jako by bylo Slunce na zvířetníku upevněno. Zlatá „ohrádka“ na okraji zodiaku představuje členění každého znamení na šest dílků; jelikož každé znamení odpovídá přibližně jednomu měsíci, tak se Slunce posune po zodiaku o jeden dílek přibližně za pět dnů.
- Čtyřiadvacetník: vnější černý prstenec s gotickými číslicemi; v průběhu roku se natáčí tak, aby číslo 24 vždy ukazovalo čas západu Slunce na stupnici s římskými číslicemi. Rozsah kývavého pohybu čtyřiadvacetníku v průběhu roku tedy sahá přibližně od IV. hodiny odpolední (v zimě) po VIII. hodinu večerní (v létě).

Zlaté Slunce je na své rafiji upevněno jen volně, aby bylo vždy na okraji zvířetníku, kde jej udržuje tenké raménko upevněné ve středu zvířetníku (nikoli tedy ve středu orloje). Stejně je upevněn i stříbrno-černý symbol Měsíce, který se také pohybuje po okraji zvířetníku. Toto řešení nebylo mezi ostatními orloji obvyklé, většinou byly symboly Slunce a Měsíce na své rafiji upevněny pevně.

² Ekliptika je dráha Slunce po obloze. Souhvězdí, kterými ekliptika prochází, tvoří zvířetník. Na orloji je na zvířetníku vyznačeno 12 tradičních souhvězdí; od dob antiky se však situace změnila a na ekliptice se dnes nachází 13 souhvězdí.

Rafije Slunce

Z polohy Slunce na astronomickém ciferníku můžeme odečíst dva základní údaje: kolik je hodin a (přibližně) datum.

a) Čas

Na orloji lze odečíst čtyři druhy času.

1. Německé hodiny (poloorlojní): odečítáme na stupnici s římskými číslicemi. Jedná se o náš „normální“ čas (pozor, bez přenastavování na letní čas, v létě tedy musíme přičíst jednu hodinu).

2. Čas staročeský: odečítáme jej na vnějším otočném prstenci s gotickými číslicemi. Je to čas počítaný od západu Slunce, kterým den začíná a je rozdělen na 24 stejných hodin. Čas západu Slunce lze tedy odečíst, uvědomíme-li si souvislost mezi naším „běžným“ časem (německé hodiny na stupnici s římskými číslicemi) a časem staročeským (na otočném prstenci s gotickými číslicemi). Ukazuje-li sluneční rafije 24 hodin staročeského času, Slunce právě zapadá; na stupnici s římskými číslicemi pak odečteme, kolik je hodin (dle „běžného“ času), tj. čas západu Slunce.

K samostatnému zamyšlení položme ještě otázku: *Lze na orloji najít i čas východu Slunce?* Odpověď lze nalézt na konci tohoto textu v kapitole *Západy a východy Slunce*.

3. Planetní hodiny (babylonský čas): doba od východu po západ Slunce je rozdělena na 12 stejných částí (v zimě jsou tedy kratší než v létě). Jednotlivé hodiny jsou vymezeny zlatými čarami vedoucími od kružnice nejbližší středu přibližně paprskovitě směrem k obvodu; tyto hodiny jsou označené arabskými číslicemi.

4. Hvězdný čas (od roku 1865) ukazuje malá zlatá hvězdička připevněná na zvířetníku na pozici jarní rovnodennosti (přesně na rozhraní znamení Ryb a Berana), odečítáme jej na římských číslicích.

Hvězdný den je oproti „normálnímu“ dni kratší přibližně o 3 min. 56 s (což odpovídá přibližně $1/365$ dne), trvá tedy 23 hod. 56 min. 4 s. S naším časem souhlasí při jarní rovnodennosti. Je to čas vycházející z rotace Země vůči hvězdám, tj. (geocentricky řečeno): „tento čas bychom měli, kdyby se Slunce v průběhu roku vůči Zemi nepohybovalo“.

b) Datum

Lze jej (přibližně) odečíst z polohy Slunce na zvířetníku. Souvislost jednotlivých znamení zvířetníku a našeho kalendáře je shrnuta v následující tabulce.

1	♈	21. 3. – 20. 4.	Aries	Beran
2	♉	21. 4. – 21. 5.	Taurus	Býk
3	♊	22. 5. – 21. 6.	Gemini	Blíženci
4	♋	22. 6. – 22. 7.	Cancer	Rak
5	♌	23. 7. – 22. 8.	Leo	Lev
6	♍	23. 8. – 22. 9.	Virgo	Panna
7	♎	23. 9. – 23. 10.	Libra	Váhy
8	♏	24. 10. – 22. 11.	Scorpius	Štír
9	♐	23. 11. – 21. 12.	Sagittarius	Střelec
10	♑	22. 12. – 20. 1.	Capricornus	Kozoroh
11	♒	21. 1. – 20. 2.	Aquarius	Vodnář
12	♓	21. 2. – 20. 3.	Pisces	Ryby

Přesnějším odečtu napomáhá zlatá stupnice na okraji zvířetníku; jeden měsíc je rozdělen na šest dílků, každý dílek odpovídá přibližně pěti dnům.

Rafije Měsíce

Tato rafije nese kuličku představující Měsíc. Ten se pohybuje po zvěrokruhu, takže lze ihned vidět, ve kterém se nachází znamení. Poměrně dobře lze z polohy Měsíce na zvěrokruhu odečíst, v jaké se Měsíc nachází fázi; stačí porovnat jeho polohu s polohou Slunce. Například: jsou-li Měsíc a Slunce v zákrytu, nastává nov, neboť ve skutečnosti je Měsíc blíže Zemi než Slunce, takže Slunce osvětluje jeho odvrácenou stranu. Naopak, nachází-li se Měsíc na zvěrokruhu v opozici vůči Slunci, nastává úplněk, neboť ze Země vidíme jeho přivrácenou část, která je Sluncem plně osvětlena.

Pro pohodlí diváka jsou fáze znázorněny také přímo měsíční koulí: polovina kuličky představující Měsíc je stříbrná, polovina začerněná. Uvnitř se nachází mechanismus poháněný gravitací (za pomoci otáčení měsíční rafije), který měsíční koulí otáčí kolem své osy jednou za synodický měsíc, tj. jednou za časový úsek od úplňku k úplňku.

Apoštolové

Kdy se apoštolové objevili na orloji, není známo. Jisté je, že na orloji byli při opravě v 60. letech 19. století. Apoštolové vycházeli dříve (do požáru v květnu 1945) ve staročeské hodiny až do západu Slunce. Dnes se objevují v každou celou hodinu od 9 do 21 hodin (donedávna až do 23 hodin), v letním období se přitom řídí letním časem.

Co orloj ukazuje – příklad

Podívejme se nyní na konkrétní příklad nastavení astronomického ciferníku a shrňme si výše uvedené údaje, které z něho lze vyčíst. Obrázek zachycuje stav orloje před opravou v roce 2018.



Zlatá ruka a symbol Slunce (jsou umístěny na jedné rafiji) ukazují přibližně k římské VIII, za chvíli (asi za 10 minut) tedy bude osm hodin večer (pozor, bude devět hodin večer letního času). Zlatá ruka navíc ukazuje přesně k číslu 24 na vnějším černém prstenci, Slunce tedy právě zapadá. Skutečně, nachází se na rozhraní modrého a oranžového pole, zapadá tedy skutečně za obzor. Úplně dole (tj. u římské XII) na vnějším černém prstenci s gotickými číslicemi je možno odečíst čas přibližně 10 minut po čtvrté hodině ranní (po páté dle letního času), kdy Slunce vyšlo.

Na zvířetníku se Slunce nachází na začátku znamení Blíženců (22. 5. až 21. 6.), přibližně za polovinou prvního dílku zlaté „ohrádky“; každý z dílků odpovídá přibližně 5 dnům, takže může být 25. května.

Malá hvězdička upevněná na zvířetníku mezi znamením Ryb a Berana ukazuje k římské dvanáctce úplně dole, je tedy dle hvězdného času půlnoc.

Měsíc je někde v první čtvrti („dochází“), nachází se totiž na zvířetníku od Slunce o jedno a půl znamení dále (tj. 3 až 4 dny po novu, neboť dvanácti znamením odpovídá 29 a půl dne) proti směru hodinových ručiček (takový je i směr jeho pohybu po zvířetníku v průběhu měsíce). Fázi Měsíce lze pohodlně odečíst také ze samotné měsíční kuličky, která je přibližně z poloviny černá a z poloviny stříbrná (není seřizena moc přesně).

3 Jak postavit stroj orloje

V této kapitole se podíváme na ozubená kola, která pohání prstenec zvířetníku, rafiji sluneční a měsíční. Zmíníme se také o ozubeném kole, které řídí unikátní mechanismus skrytý uvnitř měsíční koule.

Ozubená kola: prstenec zvířetníku a sluneční rafije

Jak na orloji obíhá Slunce? Ve středu orloje je naznačena Země, kolem ní Slunce oběhne jednou za jeden střední sluneční den. Zároveň se Sluncem se kolem středu orloje otáčí prstenec zvířetníku; otáčí se jen nepatrně rychleji než Slunce, a to tak, aby Slunce po zvířetníku oběhlo kolem dokola jednou za rok proti směru hodinových ručiček. Na 365 oběhů Slunce tedy připadá 366 oběhů zvířetníku. Rozdíl v rychlostech otáčení je tedy tak malý, že v průběhu dne to vypadá, jako by Slunce bylo na zvířetníku pevně umístěno a oběh za den jako by vykonávaly současně.

Podívejme se nyní na příslušná ozubená kola. Slunce, zvířetník i Měsíc jsou poháněny každý svým kolem, všechna tři kola mají společný střed – je jím střed orloje. Každé z nich má sice jiný počet zubů, ale za jeden den se každé z těchto tří kol otočí o stejný počet zubů: přesně o 366 zubů za den.³ Určit počty zubů kola pohánějícího sluneční rafiji a kola pohánějícího prstenec zvířetníku je nyní snadné.

- Kolo Slunce: otočí se jednou za den, proto má 366 zubů.
- Kolo zvířetníku: zvířetník se pohybuje rychleji než Slunce (kolo zvířetníku má tedy méně zubů). Jak jsme již zjistili, na 365 oběhů

³ Každé z těchto tří kol je sice poháněno vlastním pastorkem, každý z těchto tří pastorků však má stejný počet zubů (24 zubů) a otáčí se stejnou rychlostí (patnáct a čtvrt otočky za den), takže tyto pastorky za jeden den pootočí kola, do nichž zabírají, celkem o 366 zubů).

Slunce připadá 366 oběhů zvířetníku, takže kolo zvířetníku musí mít o jeden zub méně, tj. 365 zubů.

Můžeme si to také představit takto: jelikož má kolo zvířetníku o jeden zub méně, tak každý den předběhne kolo Slunce o jeden zub, po 365 dnech už to dá celý jeden oběh. (Přestupné roky se korigují ručně.)

Z uvedeného také vyplývá, že zvířetník vykoná jeden oběh za den zkrácený přibližně o jeho $1/365$, tj. za tzv. hvězdný den (23 hodin, 56 minut a 4 sekundy). Proto také malá hvězdička upevněná na zvířetníku ukazuje tzv. hvězdný čas.

Ozubená kola: měsíční rafije

Odvoďme nyní počet zubů, které má kolo pohánějící měsíční rafiji. Označme počet jeho zubů m .

Nejprve shrňme fakta o oběhu Měsíce.

- Měsíc oběhne po zvířetníku tak, aby byl vůči Slunci ve stejné poloze (např. v zákrytu), jednou za synodický měsíc – průměrně za 29 dní 12 hod. 44 min. 2,7 s.
- Sluneční kolo má 366 zubů. Údaj je zásadní, protože fáze Měsíce se odvíjejí od polohy Měsíce vůči Slunci.
- Měsíc se pohybuje po zodiaku ve stejném směru jako Slunce (proti směru hodinových ručiček), má tedy vůči zvířetníku větší „zpoždění“ než Slunce, tj. měsíční kolo musí mít více zubů, než kolo sluneční, přesně je to o $m - 366$ zubů.

Nyní můžeme určit počet zubů m měsíčního kola. Toto m musí odpovídat „zpoždění“ měsíčního kola o jednu otáčku vůči slunečnímu kolu za synodický měsíc, tj. nejlépe za 29 dní 12 hod. 44 min. 2,7 s, přibližně za 29,53 dne.

za 1 den	366 zubů	1 otáčka na slunečním kole
za 29,53 dne	$29,53 \cdot 366$ zubů	29,53 otáčky na slunečním kole
za 29,53 dne	$29,53 \cdot 366$ zubů	$(29,53 - 1)$ otáčky na měsíčním kole

Za 29,53 dne se totiž měsíční kolo musí zpozdit o 1 celou otáčku, tj. otočit se pouze 28,53krát. Jelikož se sluneční i měsíční kolo otáčí za stejný časový úsek o stejný počet zubů, dostáváme rovnost:

$$29,53 \cdot 366 = 28,53 \cdot m.$$

Odtud ihned máme

$$m = 378,828 \dots \approx 379 \text{ zubů}.$$

Výsledný počet zubů jsme zaokrouhlili nahoru. Co to znamená? Měsíční kolo má „více zubů“ než by mělo mít, takže se více zpomaluje, Slunce a Měsíc tedy budou opět ve stejné poloze nepatrně dříve. V současné době korekci zajišťuje opravný stroj.

K menšímu zamyšlení položme následující otázky.

- *Za jak dlouho se Měsíc na orloji dostane opět do stejné polohy vůči Slunci (při použití 379 zubů)?*
- *Po jak dlouhé době bude rozdíl činit jeden den?*

Mechanismus uvnitř Měsíce

Uvnitř měsíční koule je ukryt unikátní strojek poháněný pouze gravitací a pohybem měsíční rafije, nemá tedy uvnitř žádný pohon, o nějž by bylo potřeba pečovat.

Jádrem celého mechanismu je ozubené kolo uvnitř měsíční koule se zuby směřujícími dovnitř. Toto kolo se pootočí o 2 zuby za 1 oběh měsíční rafije, který vykoná společně se zvířetníkem za cca 1 den). Kolik zubů tedy musí mít toto vnitřní kolo, aby se otočilo společně s měsíční koulí jednou za synodický měsíc, tj. přibližně za 29,53 dne?

Na první pohled to vypadá na $29,53 \cdot 2 = 59,06$, tj. po zaokrouhlení 59 zubů. Historickou kuriozitou je, že takto chybně to určil i profesor astronomie a ředitel pražské hvězdárny Josef Jiří Böhm při opravě v 60. letech 19. století. V čem je problém? Měsíční kolo vykoná za synodický měsíc pouze 28,53 oběhů (jak jsme určili i v tabulce výše), a tak je třeba jen $28,53 \cdot 2 = 57,06$, tj. po zaokrouhlení 57 zubů.

4 Konstrukce astronomického ciferníku

Základní myšlenka konstrukce astronomického ciferníku pražského orloje je v podstatě velmi jednoduchá: je na něm promítnuta část nebeské sféry pomocí stereografické projekce ze severního pólu.

Stereografická projekce

Jak funguje toto zobrazení? Představme si *světovou sféru* (na ni jsou promítnuty hvězdy, Slunce, Měsíc, ...), samozřejmě zmenšenou tak, jak potřebujeme. Jejím středem je vedena rovina *světového rovníku*; právě do této roviny budeme promítat body světové sféry pomocí stereografické projekce.

Zvolme si na sféře bod, který budeme chtít promítnout do roviny (např. je to významná hvězda, Slunce či Měsíc). Spojme tento bod se severním *světovým pólem*. Tam, kde protne přímka procházející promítaným bodem sféry a severním pólem rovinu světového rovníku, leží obraz bodu sféry.

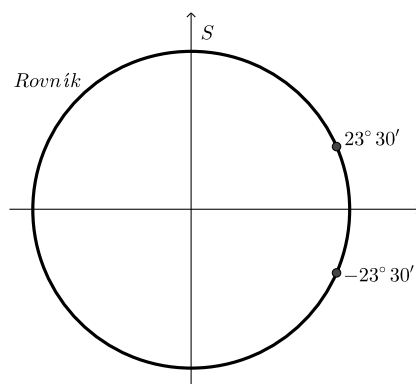
Je zřejmé, že body severní polokoule se zobrazí do části roviny vně sféry, body světového rovníku se zobrazí samy na sebe, body jižní polokoule se zobrazí do té části roviny, která leží uvnitř sféry.

Proč právě stereografická projekce? Byla zvolena proto, že se jedná o konformní zobrazení, tj. zachovává velikosti úhlů. Také zobrazuje kružnice na sféře neprocházející pólem, z něhož promítáme, opět na kružnice v rovině, do níž promítáme. Vzhledem k tomu, že (zjednodušený) model vesmíru je plný kruhových drah a dalších kružnic (obzor, rovník, obratníky, rovnoběžky, ...), je tato vlastnost skutečně klíčová. Konstrukce kružnic je mimo jiné mnohem snazší, než konstrukce naprosté většiny jiných křivek.

Konstrukce ciferníku

Nyní můžeme přistoupit ke konstrukci astronomického ciferníku. Ciferník je vlastně část roviny vymezená obrazem obratníku Raka. Uvnitř tedy najdeme rovník a obraz obratníku Kozoroha.

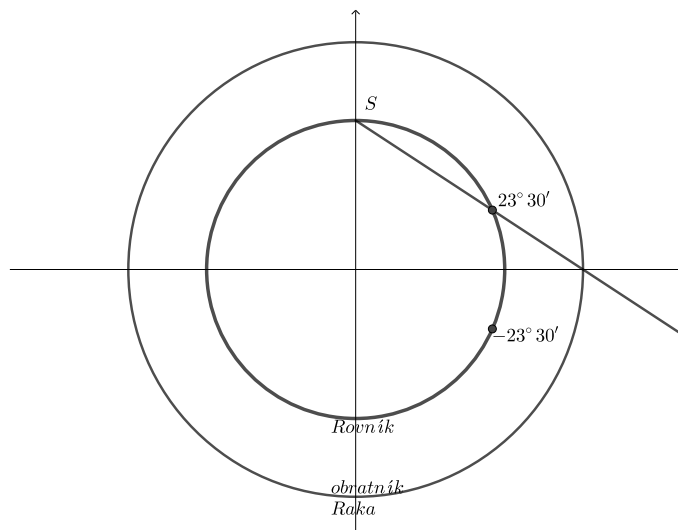
Při konstrukci ciferníku vyjdeme z kružnice, kterou je nejjednodušší sestavit: obraz rovníku. Při jeho konstrukci totiž musíme pamatovat jen na jednu věc: od jeho velikosti se bude odvíjet velikost celého ciferníku. Jinak zkrátka narýsujeme libovolnou kružnici.



Obr. 1: Konstrukce rovníku.

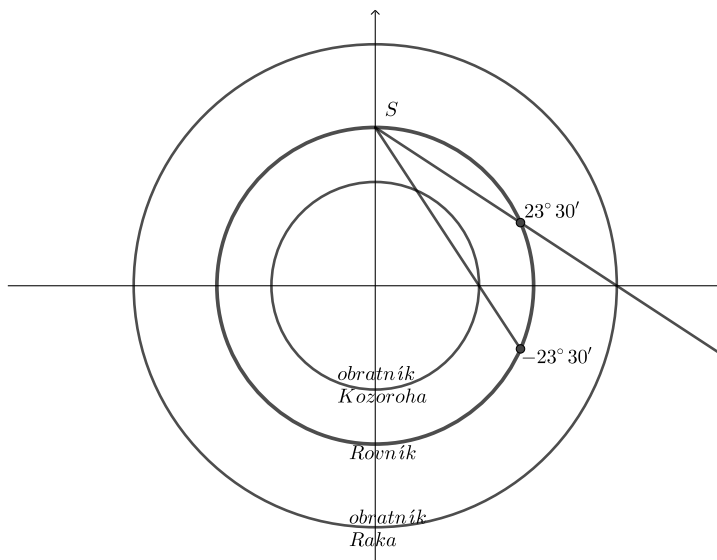
Poznamenejme nejprve, že obrazy obou obratníků i rovníku tvoří soustředné kružnice, neboť při pohledu „shora“, tj. ze severního pólu, se tak skutečně jeví. Jelikož jsou obratníky přibližně $23^{\circ} 26'$ od rovníku, naměříme na rovníku (na obě strany) $23^{\circ} 26'$, viz obr. 1.

Po obrazu rovníku zkonstruujeme další kružnici – obraz obratníku Raka. Získáme tak vnější hranici ciferníku, neboť právě obratník Raka určuje celkovou velikost ciferníku. Poloměr této kružnice najdeme tak, že vedeme přímkou bodem rovníku odpovídajícím $23^{\circ} 26'$ a severním pólem; průsečík této přímky s „osou x “ (představme si na jejím místě rovinu ciferníku procházející středem sféry, do níž promítáme) je bodem obrazu obratníku Raka, tato kružnice má střed ve středu rovníku, který je zároveň středem astronomického ciferníku, viz obr. 2.



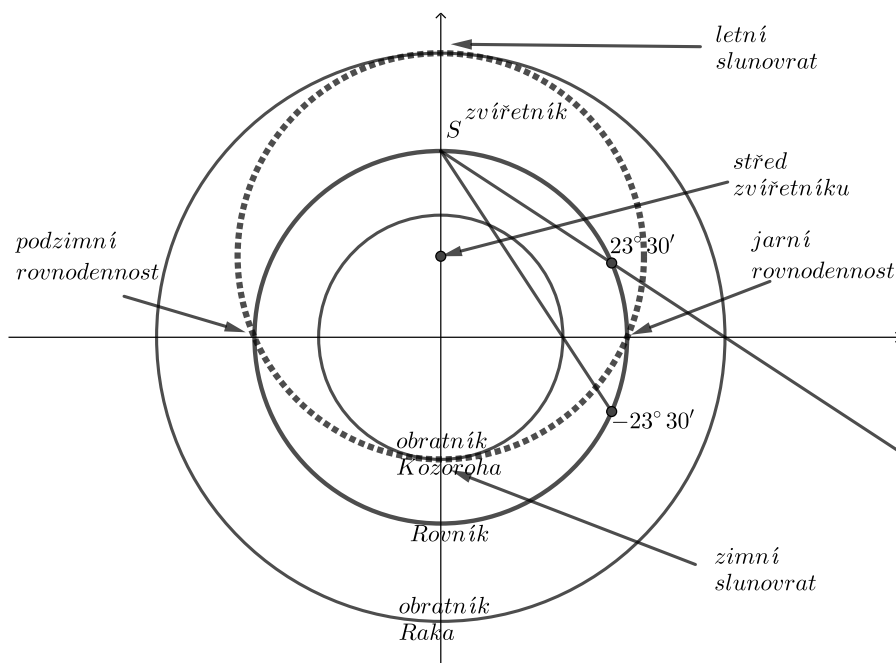
Obr. 2: Konstrukce obratníku Raka (vnější hranice ciferníku).

Podobně zkonstruujeme obraz obratníku Kozoroha. Změna je pouze ve znaménku velikosti orientovaného úhlu ($-23^\circ 26'$), viz obr. 3.



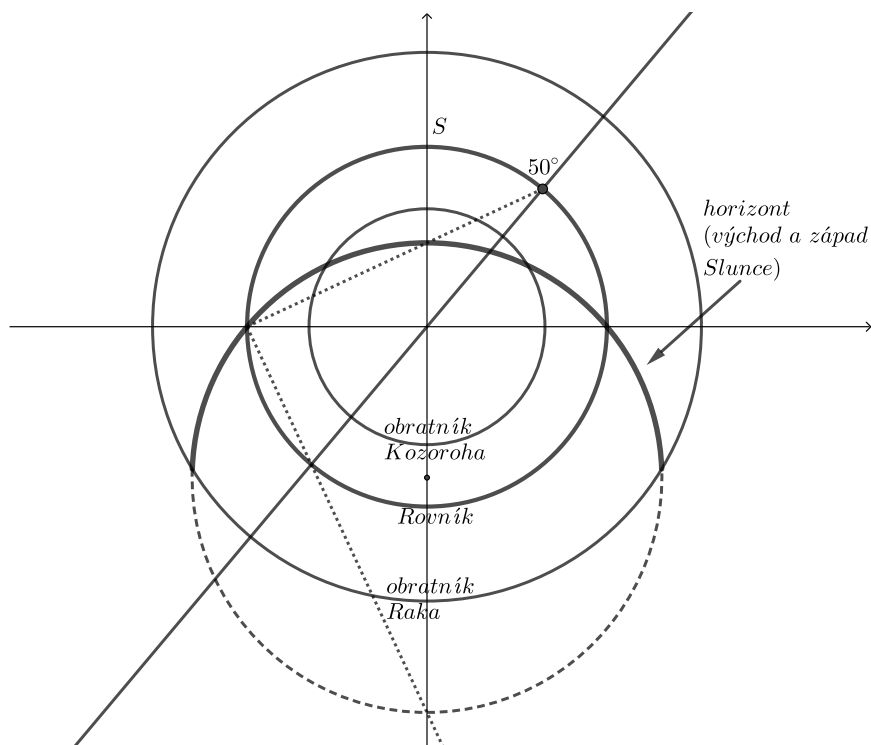
Obr. 3: Konstrukce obratníku Kozoroha.

Konstrukce obrazu zvířetníku je také snadná: jedná se vlastně o *ekliptiku*, tj. dráhu Slunce během roku (souhvězdí, v nichž se Slunce v průběhu roku nachází, bylo tradičně dvanáct, dnes tomu tak už není), Slunce se pohybuje (přibližně) po kruhové dráze mezi obratníky, proto je kružnice vyznačená na obr. 4 čárkovanou čarou obrazem zvířetníku. Střed této kružnice je prostě středem jejího průměru.



Obr. 4: Konstrukce zvířetníku (tečkovaně).

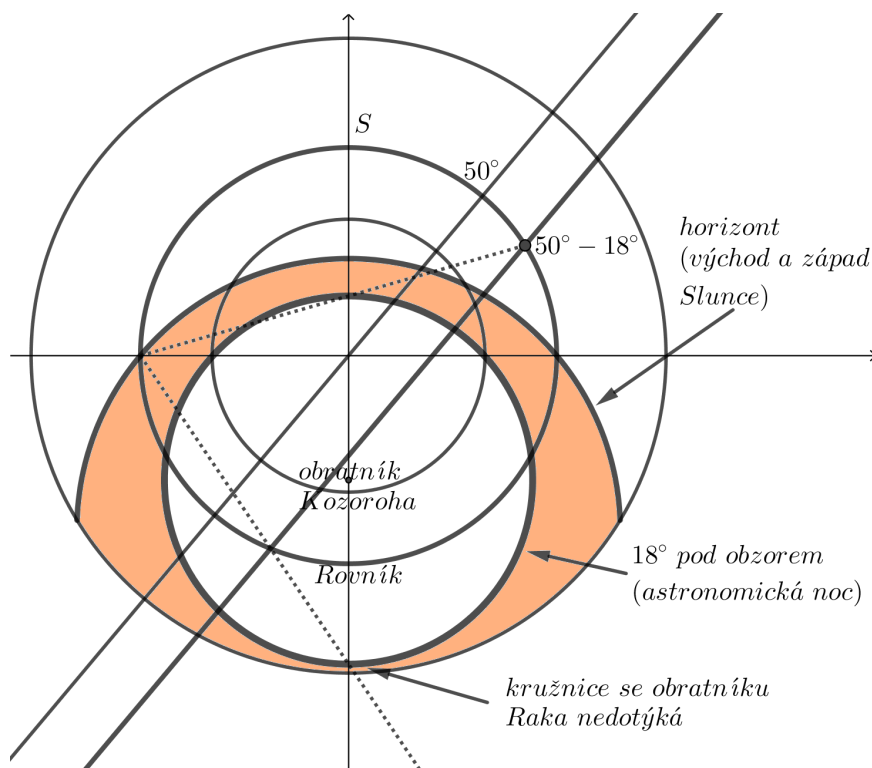
Při velké opravě orloje v 60. letech 19. století hodináři doporučili udělat zvířetník menší (jeho průměr byl o 20 cm menší než správná velikost), aby svou vahou nebrzdil chod orloje. Nápravou byl pověřen matematik univ. prof. František Josef Studnička, který vymyslel ono elegantní a estetické řešení: opravu pomocí zlaté „ohrádky“, která zvířetník zvětšila na správný rozměr a zároveň plní funkci stupnice.



Obr. 5: Konstrukce obzoru (horizontu).

Jelikož se staroměstský orloj nachází na 50. rovnoběžce (přesněji je zeměpisná šířka $50^{\circ} 5' 13''$), můžeme obzor (nazývaný také horizont) zkonstruovat postupem naznačeným tečkovanými čarami na obr. 5. Tyto čáry procházejí průsečíky přímký se směrovým úhlem 50° s rovníkem a jsou na sebe kolmé. Průměr kružnice obsahující obzor je pak dán průsečíky těchto tečkovaných čar s „osou y “.

Podobně jako obzor lze zkonstruovat kružnici astronomické noci, kdy je Slunce 18° pod obzorem, viz obr. 6. Oranžově je naznačena oblast svítání a soumraku; přesněji: když se zde Slunce nachází, tak astronomická noc buď ještě nenastala, ale je po geometrickém západu Slunce (soumrak), nebo už skončila, ale ještě nenastal geometrický východ Slunce (svítání).



Obr. 6: Konstrukce kružnice astronomické noci.

Z toho, že kružnice astronomické noci leží celá uvnitř obratníku Raka (nedotýká se jej, ani jej neprotíná), vidíme, že v období letního slunovratu nenastává astronomická noc. Obě kružnice by se dotýkaly, kdyby byl ciferník orloje zkonstruován pro zeměpisnou šířku $48^\circ 34'$; tam⁴ nastává astronomická noc pouze jednou noc v roce (za letního slunovratu).

Stereografická projekce ze severního či jižního pólu

Stereografická projekce se používala při konstrukci astronomického přístroje nazývaného *astroláb*. Byla to však výhradně projekce z jižního pólu, neboť při projekci ze severního pólu se většina hvězd severní oblohy zobrazí vně ciferníku, na ciferník (přesněji do vnitřku kružnice rovníku) se zobrazí hvězdy jižní oblohy. Proto se také astroláby konstruovaly po-

⁴ Takové místo se v ČR nachází nedaleko Vyššího Brodu, přesněji asi 1,6 km severně od nejjižnějšího bodu ČR (zeměpisná šířka $48^\circ 33'$). Hodnotu $48^\circ 34'$ lze získat snadno: zeměpisná šířka severního polárního kruhu je přibližně $66^\circ 34'$, astronomická noc nastává, když je Slunce 18° pod obzorem; proto $48^\circ 34' = 66^\circ 34' - 18^\circ$.

mocí projekce z pólu jižního. Už koncem 15. stol. se takto stavěly i orloje, aby souhlasily s astroláby, neboť orloj je vlastně astrolábem, který je poháněn hodinovým strojem, a tak je stále nastavován, aby odpovídal skutečnosti. Projekce ze severního pólu použitá u pražského orloje je tedy známkou jeho vysokého stáří (vznik 1410). Výhodou projekce ze severního pólu je, že v létě se Slunce kolem poledne na orloji nachází nejvýše a v zimě nejnižší, což je názorné pro publikum.

Na pražském orloji nejsou vyznačeny žádné hvězdy; jediným reprezentantem hvězdné oblohy je zvířetník. Ten se otočí jednou za den, i když ve skutečnosti se jednou za den otáčí Země. Na orloji tedy máme ukázkou geocentrického modelu, který reprezentuje zdánlivé pohyby Slunce a Měsíce.

S tímto souvisí otázka, co se nachází ve středu astronomického ciferníku: správně by se zde měl nacházet obraz (jižního) světového pólu, neboť se vše otáčí kolem zemské osy. Nachází se tam však zeměkoule natočená tak, že ve středu je Praha. Bylo tomu tak před opravou v roce 2018 (zeměkoule byla namalovaná i se světadíly neznámými ve středověku: Amerikou a Austrálií) i po ní (zeměkoule naznačena zlatou zeměpisnou sítí; světadíly tak sice zmizely, střed je však opět umístěn chybně).

Západy a východy Slunce

Na orloji lze snadno zjistit, kdy v aktuální den zapadá Slunce: čas západu Slunce odečteme na stupnici s římskými číslicemi, a to přímo u čísla 24 nacházejícího se na vnějším otočném prstenci s gotickými číslicemi, na němž se odečítá staročeský čas (staročeský den totiž začíná západem Slunce).

Málokdo ví, že podobně pohodlně můžeme odečíst i čas východu Slunce. Stačí si uvědomit, že časový interval od západu Slunce do půlnoci je přibližně roven intervalu od půlnoci po východ Slunce (tzv. časovou rovnici a další drobné vlivy zanedbáme). Ve 24 hodin na vnějším otočném prstenci s gotickými číslicemi zapadá Slunce, interval k půlnoci (XII úplně dole na ciferníku s římskými číslicemi) tedy vidíme na vnějším otočném prstenci s gotickými číslicemi (od gotické 24 až po časový údaj, který se nachází úplně dole); na tomto prstenci tedy odečteme čas východu Slunce úplně dole přímo u čísla XII.

Okamžik západu Slunce je také možno názorně spatřit, když Slunce zapadá za obzor naznačený zlatým kruhovým obloukem na rozhraní

modrého a červeného pole astronomického ciferníku. Podobně lze pozorovat i okamžik východu Slunce. Vezmeme-li v úvahu směr otáčení sluneční rafije⁵, východ Slunce pozorujeme přibližně vlevo (v momentě, kdy se Slunce na sluneční rafiji nachází na obzoru), potom Slunce pokračuje vzhůru modrým polem (když je nahoře, nastává poledne; Slunce je na poledníku), následně klesá modrým polem k obzoru, západ Slunce tedy pozorujeme vpravo. Když je Slunce dole, nastává půlnoc.

Lze namítnout, že plechové pozlacené Slunce je veliké, takže přesnost odečtu je velmi nízká. Slunce však naštěstí nezasahuje úplně do okraje prstence zvířetníku (což je přísně vzato chyba, mělo by se pohybovat po jeho okraji), tak je zřetelně vidět průsečík sluneční rafije s okrajem zvířetníku (okrajem je až vnější okraj zlaté „ohrádky“). Právě tento průsečík naznačuje přesnou polohu Slunce, takže v momentě, kdy leží na obzoru, nastává východ, resp. západ Slunce.

Každý den však pozorujeme, že poté, co Slunce zapadlo za obzor, je ještě přibližně půl hodiny světlo. A tak rozlišujeme geometrický západ Slunce, kdy Slunce zapadlo za obzor, ale je ještě světlo, a občanský západ, kdy už je skutečně (skoro) tma. V praxi lze pozorovat, že (skoro) tma nastává, když je Slunce přibližně 6° pod obzorem. V astronomii se rozlišují různé západy Slunce, shrnuty jsou v následující tabulce.

	západ Slunce	charakteristika
0°	geometrický	Slunce zapadlo za obzor, ale ještě je normálně vidět
-6°	občanský	značně se zešeřilo
-12°	nautický	skoro tma, ale je vidět obzor, který se používá při námořní navigaci
-18°	astronomický	začíná „opravdová“ noc (vhodná pro astronomická pozorování)

Kdybychom si chtěli sestavit lepší orloj, než je ten staroměstský, mohli bychom kromě obzoru vyznačit i další kružnicové oblouky, z nichž by bylo možno odečítat polohu Slunce po jeho západu, zejména by bylo možné pozorovat jednotlivé západy. Na staroměstském orloji máme vy-

⁵ Směr otáčení hodinových ručiček je odvozen právě ze směru otáčení sluneční rafije na středověkých orlojích; je dán pohybem Slunce po obloze; přesněji pohybem jeho obrazu ve stereografické projekci po astronomickém ciferníku. Původně měly hodiny jen jednu (hodinovou) ručičku, která oběhla ciferník jednou za 24 hodin; záhy se přikročilo ke dvěma otáčkám hodinové ručičky za den (hodiny německé, poloorlojní), čímž se dosáhlo přesnějšího odečítání času (větší stupnice, možnost jejího jemnějšího členění).

značen obzor (zlatou linií) a astronomickou noc (černý kruh ve spodní části orloje), lze tedy pozorovat geometrický a astronomický západ Slunce. Vše je na orloji naznačeno latinskými nápisy:

začátek geometrického západu (a východu) Slunce:

ortus – východ, occāsus – západ,

doba mezi astronomickým a geometrickým západem (resp. východem) Slunce:

aurōra – svítání, crepusculum – soumrak.

Literatura

[Ho] Z. Horský: *Pražský orloj*. Panorama, Praha, 1988.

[web] *Pražský orloj*. <http://www.orloj.eu/>

[P2009] *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Vol. 54 (2009), No. 4, str. 265–378.

Dostupné z <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141918>.

[P2013] *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Vol. 58 (2013), No. 3, str. 177–266.

Dostupné z <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/143453>.

[Žá] J. Žáček: *Staroměstský orloj (skutečnosti a legendy)*. HBT, Praha, 2015.

