Mocniny, odmocniny, logaritmy, exponenciála

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

2019

Neurčité výrazy

Proč není definováno 0^0 1^∞ ?

Neurčité výrazy lze mezi sebou převádět

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0\cdot\infty \quad 0^0 \quad 1^\infty$$

Obecná mocnina

definována pro $x > 0$

$x^n = x \cdot \dots \cdot x$ pro $n \in \mathbb{N}$

$x^0 = 1$

$x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ pro $m, n \in \mathbb{N}$

$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}$ pro $m, n \in \mathbb{N}$

$x^\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} x^{\alpha_k}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha_k \in \mathbb{Q}, \alpha_k \to \alpha$

$0^\alpha = 0$ pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$

liché odmocniny lze pro $x \in \mathbb{R}$
($f(x) = x^n$ je na $\mathbb{R}$ rostoucí, tj. prostá, tj. existuje f^{-1})

Exkurs – binomická věta

binomické koeficienty:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\dots\cdot(\alpha-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k}$$

k činitelů v čitateli i ve jmenovateli, $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \binom{\alpha}{4}x^4 + \dots =$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

pro $\alpha \in \mathbb{N}$ je rozvoj konečný:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Exkurs – binomická věta

souvislost s odmocninami

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4}x^4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Například:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \dots$$

Tato aproximace však není moc efektivní:

$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1,4375$

$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} = 1,3984375$

100 členů: $1,414|073\dots$ 500 členů: $1,4142|00956\dots$

Odmocniny

Odmocniny

definice: $x = \sqrt{a}$, $a \geq 0$ takové nezáporné x, pro které platí

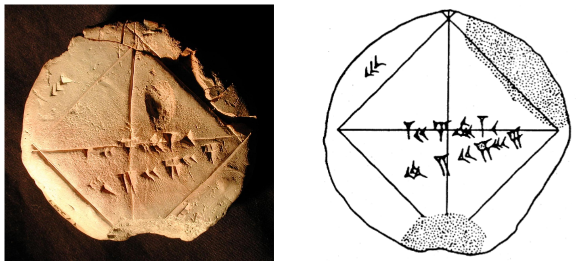
$$x^2 = a$$

Existuje takové x?

Tj. $\exists!$ průsečík $x_0 \geq 0$ funkce $y = x^2 - a$ s osou x?

- existuje: funkce je spojitá
  - pro $a > 1$: $y(0) < 0$, $y(a) > 0$
  - pro $0 < a < 1$: $y(0) < 0$, $y(1) > 0$
    dle Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot tedy $\exists x_0$
  - pro $a = 1$: $y(1) = 0$
  - pro $a = 0$: $y(0) = 0$
- právě jeden: funkce je na $\mathbb{R}_0^+$ rostoucí, tj. prostá

Odmocniny



Tabulka YBC 7289

$$\sqrt{2} = 1;\,24,\,51,\,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421|296\dots$$

Odmocniny

Hérón z Alexandrie (1. stol. po Kr.)
spis **Metrika**, I, 8:

Existuje obecný postup jak nalézt bez znalosti výšky obsah libovolného trojúhelníku, jsou-li dány tři strany.

Nechť mají strany trojúhelníku délku 7, 8, 9 jednotek.
Sečti 7, 8 a 9, vznikne 24. Z nich vezmi polovinu, vznikne 12.

Odeber 7 jednotek, zbude 5. Opět od těch 12 odeber 8 jednotek, zbudou 4. A ještě těch 9, zbudou 3.

Vynásob 12 pěti, vznikne 60. To čtyřmi, vznikne 240. To třemi, vznikne 720.

Z nich vezmi stranu a to bude obsah toho trojúhelníku.

$$S_\triangle = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\,,$$

kde $s = \frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2}$.

Odmocniny

Hérónova Metrika – pokračování:

Jelikož druhá odmocnina 720 není racionální, určíme ji s nejmenší chybou takto:
Jelikož je 720 nejbližší čtverec 729 a jeho strana je 27, vyděl 720 27, vznikne 26 a 2/3. Přidej 27, vznikne 53 a 2/3. Z toho polovina,
vznikne 26 1/2 1/3. Nejbližší strana 720 je tedy 26 1/2 1/3.

26 1/2 1/3 vynásobeno samo sebou dává 720 1/36 …

$$x_2 = \frac{\frac{720}{x_1} + x_1}{2} = \frac{720 + x_1^2}{2x_1}$$

$$x_1 = 27$$

Odmocniny
Výpočet iterační metodou

$$x^2 = a$$

Pseudoodvození iteračního předpisu

$\sqrt{720} = ?$

$$\begin{aligned} x^2 &= 720 && / \quad + x^2 \\ 2x^2 &= 720 + x^2 && / \quad : 2x \\ x &= \frac{720 + x^2}{2x} && \Longrightarrow \quad \text{posloupnost zadaná rekurentně:} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{720 + x_n^2}{2x_n}, \qquad x_0 > 0}$$

Odmocniny
Výpočet $\sqrt{720}$

$$x_{n+1} = \frac{720 + x_n^2}{2x_n}, \qquad x_0 > 0$$

x_0	27
x_1	$26{,}8\overline{3}$
x_2	26,8328157|34989648…
x_3	26,83281572999747635|737447…
x_4	26,8328157299974763569100840247753148252|914…
x_5	26,83281572999747635691008402477531482528742031533830 869125076694492625110765365|9 …

počet platných cifer za des. čárkou: 2 7 17 37 77 158 318 640
tj. po 6 iteracích přesnost na více než 150 míst

Odmocniny
Náznak odvození vztahu pro výpočet $\sqrt{a}$, kde $a \geq 0$

$\sqrt{a} = n + \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < 1, n \in \mathbb{N}$

$a = (n+\varepsilon)^2 = n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 \approx n^2 + 2n\varepsilon$

$$\varepsilon \approx \frac{a - n^2}{2n}$$

$$\sqrt{a} \approx n + \varepsilon = n + \frac{a - n^2}{2n}$$

$$\sqrt{a} \approx \frac{a + n^2}{2n}$$

n nemusí být nutně z $\mathbb{N}$, může to být i lepší aproximace,
ε je pak ještě menší (výhoda při zanedbání ε^2)
postup tedy můžeme opakovat:

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}, \qquad 0 < x_0 < \sqrt{a}$$

Výpočet *k*-té odmocniny
definice: $x = \sqrt[k]{a}$ takové nezáporné x, pro které platí

$$x^k = a$$

($k \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, pro lichá k lze $a \in \mathbb{R}$)

Zobecnění postupu pro druhou odmocninu na k-tou odmocninu

$\sqrt[k]{5} = ?$

$$\begin{aligned} x^k &= 5 && / \quad + (k-1)x^k \\ k \cdot x^k &= 5 + (k-1)x^k && / \quad : k \cdot x^{k-1} \\ x &= \frac{5 + (k-1)x^k}{k \cdot x^{k-1}} && \text{posloupnost zadaná rekurentně:} \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = \frac{5 + (k-1)x_n^k}{k \cdot x_n^{k-1}}, \qquad x_0 > 0$$

Logaritmy

Předchůdce logaritmu

logaritmy — základní účel: zjednodušit pracné výpočty (násobení a dělení)

formule převádějící násobení na sčítání byly známy i dříve:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

Tycho Brahe (1546–1601) zaměstnával na svém ostrově Hven počtáře:
Paul Wittich – usnadňoval si výpočty výše uvedenou rovností

Logaritmy — v populární literatuře
John Napier z Merchistonu (1550–1617)
1. tabulky: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Edinburgh, 1614)

$$NapLog(x) = \frac{\log\frac{10^7}{x}}{\log\frac{10^7}{10^7-1}}$$

Henry Briggs (1561–1630)
první tabulky dekadických logaritmů (14místné)
Logarithmorum chilias prima (1617)

$$\mathrm{Log}\,(ab) = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,1$$

„aby vznikalo co nejméně problémů při výpočtech“, volí se $\mathrm{Log}\,1 = 0$

Dnešní definice:

$$\log_a x = y \qquad x = a^y$$

Logaritmy — počátek

John Napier (1550–1617):
Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614)
Mirifici logarithmorum canonis constructio (1619)

Původní definice:
Logaritmus sinu je takové číslo, které velmi přesně určuje úsečku,
která se zvětšovala lineárně,
ve stejném čase úsečka příslušná celému sinu se zmenšovala geometricky až k zadanému sinu
a každý pohyb je chápán synchronně a s týmiž počátečními rychlostmi.

Napier však při generování tabulek použil vztahu mezi aritmetickou a geometrickou posloupností. **Co jsou tedy Napierovy logaritmy?**

Oblasti využití: výpočty zejména při navigaci, také astronomické výpočty
proto tabulka logaritmů hodnot sinu

Logaritmy — šíření po Evropě

logaritmy velmi praktické, objev se brzy rozšířil po Evropě:

Johannes Kepler (1571–1630)
Chiliades logarithmorum (1624)

Denis Henrion (1580–1640)
Traité des logarithmes (1626)

Adrian Vlacq (1600–1667)
Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades centum (1628)
(vylepšené Briggsovy tabulky)

Bonaventura Cavalieri (1598–1641)
Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta (1632)
(spis o aplikacích logaritmů)

Logaritmy — základní idea

John Napier (1550–1617)

Tabulka mocnin o základu 2:

1	2	5	32	9	512	13	8192
2	4	6	64	10	1024	14	16384
3	8	7	128	11	2048	15	32768
4	16	8	256	12	4096	16	65536

Např.: $16 \cdot 64 = 1024$
Pomocí tabulky: $4 + 6 = 10$, tj. 1024

Problém: tabulka je řídká.

větší základ by to ještě zhoršil: $5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, \ldots$

Řešení: základ blízký 1. Např. $1,001$ má celočíselné mocniny:
$1,001 \quad 1,002001 \quad 1,003003001 \quad 1,004\ldots \quad 1,005\ldots \quad 1,006\ldots$
$1,007\ldots \quad 1,008\ldots \quad 1,009\ldots \quad 1,010\ldots \quad 1,011\ldots \quad 1,012\ldots$

Logaritmy — základní idea

ilustrace: základ $1 - \frac{1}{10}$ (lépe je mít hodnoty v intervalu (0,1))

1	0,9	15	0,20589113209464907
2	0,81	16	0,18530201888518416
3	0,729	17	0,16677181699666577
4	0,6561	18	0,15009463529699918
5	0,59049	19	0,13508517176729928
6	0,531441	20	0,12157665459056935
7	0,4782969	21	0,10941898913151242
8	0,43046721	22	0,09847709021836118
9	0,387420489	23	0,08862938119652507
10	0,3486784401	24	0,07976644307687256
11	0,31381059609		...
12	0,282429536481		
13	0,2541865828329		
14	0,22876792454961		

Např.: $0,43 \cdot 0,282 = 0,12126$
pomocí tabulky:
$8 + 12 = 20$, tj. $0,121$

Logaritmus – název

z řeckých slov **logos** (poměr) a **arithmos** (přirozené číslo)

je-li dána aritmetická a geometrická posloupnost
logaritmy jsou **indexy poměrů** (členů geometrické posloupnosti)

Logaritmy — Napierův základ: $1 - 10^{-7}$

n	$(1-10^{-7})^n$
1	0,9999999
2	0,9999998 0000001
3	0,9999997 00000029999999
4	0,9999996 0000005999999960000001
5	0,9999995 00000099999990000000499999999
	...
100	0,9999900 0004949983830039212...
	...
7 500 000	0,4723665 3502726813056629714...
	...
10 000 000	0,3678794 2277746949660786692...
	...
100 000 000	0,0000453 9990706252413195309 13...
100 000 001	0,0000453 9990252253342570067 81...

Logaritmy — Napierova tabulka (základ $1 - 10^{-7}$)

John Napier: *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, Edinburgh, 1614.

$$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^n$$

Napier by musel stále násobit, to by však bylo velmi náročné.
Proto tyto mocniny nepočítá!

tzv. **První tabulka:**

$n = 1$ 9 999 999, 000 000 0
- 0,9 999 999 = 9 999 998, 000 000 1

$n = 2$ 9 999 998, 000 000 1
- 0,9 999 998 = 9 999 997, 000 000 3

$n = 3$ 9 999 997, 000 000 3
- 0,9 999 997 = 9 999 996, 000 000 6

... ...

$n = 100$ 9 999 900, 000 495 0

Logaritmy a odmocniny

Hry s kalkulátorem

n	$\sqrt[n]{2}$
1	2
2	1, 414213562373095...
3	1, 259921049894873...
10	1, 0 717734625362931...
100	1, 00 **69** 55550056718...
1 000	1, 000 **693** 38746258...
10 000	1, 0000 **6931** 7120376...
100 000	1, 00000 **69314** 958282...
1 000 000	1, 000000 **693147** 4208...

ln 2 = 0, **6931471805599453** ...

Cifry jsou při volbě $n = 10^k$ stejné: je to náhoda?

Dekadické logaritmy

Od Napiera k Briggsovi

Napierova tabulka: mocniny základu $1 - 10^{-7}$
výhoda: výpočet opakovaným násobením základem
nevýhoda: nemožnost „lokálního zjemnění"
tabulku řídí mocniny, ne samotná čísla

Chceme přímo tabulkovou hodnotu y, a to např. k číslu $0,7$
Vzniká otázka vhodného základu, zvoleno číslo 10;
všechna čísla tedy vyjádřena jako mocniny čísla 10.

$$10^y = 0,7$$

Henry Briggs (1561–1630)
Arithmetica Logarithmica, London, 1624.
dekadické logaritmy

$$\log x = y \qquad x = 10^y$$

Logaritmy — výpočet dekadických logaritmů

Výpočet $\log_{10} 2$ základní pozorování: $\sqrt[n]{c} \to 1$

například $\sqrt[n]{2} \to 1$

n	$\sqrt[n]{2}$
1	2
2	1, 414213562373095...
3	1, 259921049894873...
4	1, 189207115002721...
5	1, 148698354997035...
20	1, 035264923841377...
100	1, 00 6955550056718...
1 000	1, 000 69338746258...
10 000	1, 0000 69317120376...
100 000	1, 00000 6931495828...
1 000 000	1, 000000 69314742...
10 000 000	1, 0000000 6931472...
100 000 000	1, 00000000 6931471...

Logaritmy

Výpočet $\log_{10} 2$ tj. $\log_{10} 2 = y$
základní pozorování: $\sqrt[n]{c} \to 1$

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \varepsilon_n \qquad \sqrt[n]{10} = 1 + \delta_n$$

$$\log_{10} 2 = y$$

$$2 = 10^y \qquad / \sqrt[n]{\ }$$

$$\sqrt[n]{2} = (\sqrt[n]{10})^y \qquad \text{tj.} \qquad 1 + \varepsilon_n = (1 + \delta_n)^y$$

dle binomické věty: $1 + \varepsilon_n = 1 + y \cdot \delta_n + \cdots$

tj. $\varepsilon_n \approx y \cdot \delta_n$

$$y \approx \frac{\varepsilon_n}{\delta_n}$$

Logaritmy

příklad: výpočet log 2

$$\log_{10} 2 \approx \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} = \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{10} - 1}$$

2	$\frac{0,4142135623...}{2,1622776601...} = 0,\ 191\ldots$
10	$\frac{0,0717734625...}{0,2589254117...} = 0,277\,197\ldots$
100	$\frac{0,0069555500567...}{0,02329299228...} = 0,298\,611\ldots$
1 000	$\frac{0,00069338746258...}{0,002305238077...} = 0,300\,787\ldots$
10 000	$0,301\,005\ldots$
	...

$$\log_{10} 2 = 0,\ 301\,029\,995\,664\ldots$$

Přirozený logaritmus

Základní pozorování:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

tj. $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ neboli $e^{1/n} = \sqrt[n]{e} \approx 1 + \frac{1}{n}$

Výpočet $\ln 2$

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \varepsilon_n \qquad \sqrt[n]{e} \approx 1 + \frac{1}{n}$$

$\ln 2 = \log_e 2 = y \qquad 2 = e^y \qquad / \sqrt[n]{\ }$

$\sqrt[n]{2} = (\sqrt[n]{e})^y$ tj. $1 + \varepsilon_n = (1 + \frac{1}{n})^y$

dle binomické věty: $1 + \varepsilon_n = 1 + y \cdot \frac{1}{n} + \cdots$

tj. $\varepsilon_n \approx y \cdot \frac{1}{n}$

$$y \approx n \cdot \varepsilon_n = n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$$

Přirozený logaritmus

příklad: výpočet $\ln 2 = \log_e 2$

Výhoda: pro výpočet hodnot $\ln x$ není třeba znát hodnotu čísla e

$$\ln 2 \approx n \cdot \varepsilon_n = n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$$

2	$2 \cdot 0,414\,213\,562 \cdots = 0,828\,427\,124\ldots$
10	$10 \cdot 0,071\,773\,462 \cdots = 0,717\,734\,62\ldots$
100	$0,69\vert 5\,555\,005\ldots$
1 000	$0,693\vert\ 387\,462\ldots$
10 000	$0,693\,1\vert 71\,203\ldots$
100 000	$0,693\,14\vert 9\,582\ldots$
1 000 000	$0,693\,147\vert\ 420\ldots$
	...

$\ln 2 = 0,693\,147\,180\ldots$

Přirozený logaritmus

zkrátka...

$$\ln 2 \approx n \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)$$

$$\sqrt[1\,000\,000]{2} = 1,000\,000\,693\,147\ \ldots$$

$$\ln 2 = 0,693\,147\ \ldots$$

Přirozený logaritmus a logaritmy o jiném základu

Definice logaritmu: je to inverzní funkce k exponenciále

$$y = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Jelikož je oborem hodnot interval $(0, +\infty)$, dostáváme:

$$y = log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y \qquad x \in (0, +\infty).$$

Logaritmujme poslední rovnost při libovolném základu, např. základu e:

$$\ln x = \ln a^y$$

Pravá strana: $\ln a^y = y \ln a$.

$$y = \boxed{log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

Exponenciála a komplexní čísla

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

pro $\varphi = \pi$: $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, tj. $\boxed{e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0}$

Kolik je i^i?